Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{lrl}
(\mathcal{P}) & \text{maximize} & -4x_1 - 2x_2 - x_3 \\
 & \text{subject to} & -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -3 \\
 & & -4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -4 \\
 & & x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 2 \\
 & & 0 \leq x_1, x_2, x_3
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{llrcl}
(\mathcal{P}) & \text{maximize} & -4x_1 - 2x_2 - x_3 & & \\
& \text{subject to} & -x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & -3 \\
& & -4x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -4 \\
& & x_1 + x_2 - 4x_3 & \leq & 2 \\
& & 0 \leq x_1, x_2, x_3 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcl}
(\mathcal{D}) & \text{minimize} & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 & & \\
& \text{subject to} & -y_1 - 4y_2 + y_3 & \geq & -4 \\
& & -y_1 - 2y_2 + y_3 & \geq & -2 \\
& & 2y_1 + y_2 - 4y_3 & \geq & -1 \\
& & 0 \leq y_1, y_2, y_3 & &
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{llrl}
(\mathcal{P}) & \text{maximize} & -4x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 & \\
& \text{subject to} & -x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 & \leq -3 \\
& & -4x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 & \leq -4 \\
& & x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 & \leq \ \ 2 \\
& & 0 \leq x_1, x_2, x_3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llrl}
(\mathcal{D}) & \text{minimize} & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 & \\
& \text{subject to} & -y_1 - 4y_2 + \ \ y_3 & \geq -4 \\
& & -y_1 - 2y_2 + \ \ y_3 & \geq -2 \\
& & 2y_1 + \ \ y_2 - 4y_3 & \geq -1 \\
& & 0 \leq y_1, y_2, y_3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Not primal feasible.

Dual feasible!

The dual has feasible origin.

The Dual Simplex Algorithm

The tableau below is said to be *dual feasible* because the objective row coefficients are all non-positive, but it is not *primal feasible*.

$$
\left|\begin{array}{cccccc|c}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|
$$

A tableau is optimal if and only if it is both primal feasible **and** dual feasible.

Can we design a pivot for this tableau that tries to move it toward primal feasibility while retaining dual feasibility?

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D})\ \min\ & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\
\text{s.t.}\quad & -y_1 - 4y_2 + \ \ y_3 \geq -4 \\
& -y_1 - 2y_2 + \ \ y_3 \geq -2 \\
& \ 2y_1 + \ \ y_2 - 4y_3 \geq -1 \\
& 0 \leq y_1, y_2, y_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D})\ \min\ & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\
\text{s.t.}\quad & -y_1 - 4y_2 + y_3 \geq -4 \\
& -y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -2 \\
& 2y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -1 \\
& 0 \leq y_1, y_2, y_3
\end{aligned}
$$

$$
\left|\begin{array}{cccccc|c}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D})\ \min\ & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\
\text{s.t.}\quad & -y_1 - 4y_2 + \ \ y_3 \geq -4 \\
& -y_1 - 2y_2 + \ \ y_3 \geq -2 \\
& \ \ 2y_1 + \ \ y_2 - 4y_3 \geq -1 \\
& 0 \leq y_1, y_2, y_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

dual objective coefficients

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D})\ \min\ & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\
\text{s.t.}\quad & -y_1 - 4y_2 + \ y_3 \geq -4 \\
& -y_1 - 2y_2 + \ y_3 \geq -2 \\
& 2y_1 + \ y_2 - 4y_3 \geq -1 \\
& 0 \leq y_1, y_2, y_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\left|\begin{array}{cccccc|c}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right| \\
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & & y_1 & y_2 & y_3 & &
\end{array}
\end{array}
$$

dual objective coefficients

Dual variables

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{rl}
(\mathcal{D}) \min & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\
\text{s.t.} & -y_1 - 4y_2 + y_3 \geq -4 \\
& -y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -2 \\
& 2y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -1 \\
& 0 \leq y_1, y_2, y_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|rrrrrr|r|l}
 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \\
 & -4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \text{dual objective coefficients} \\
 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & & & y_1 & y_2 & y_3 & &
\end{array}
$$

Dual variables

Increasing y_1 decreases the value of the dual objective.

Primal-Dual Correspondences

Increasing y_1 means we pivot on row 1.

$$
\left|\begin{array}{rrrrrr|r|}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

Primal-Dual Correspondences

Increasing y_1 means we pivot on row 1.

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Increasing y_1 means we pivot on row 1.

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

By how much can we increase the value of y_1?

Primal-Dual Correspondences

Increasing y_1 means we pivot on row 1.

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

By how much can we increase the value of y_1?

$$
\begin{array}{r|}
-y_1 - 4y_2 + y_3 \geq -4 \\
-y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -2 \\
2y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -1
\end{array}
$$

Primal-Dual Correspondences

Increasing y_1 means we pivot on row 1.

$$\begin{array}{|rrrrrr|r|l} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\ -4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\ \hline -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

By how much can we increase the value of y_1?

$$\begin{array}{r|l} & \text{ratio} \\ -y_1 - 4y_2 + y_3 \geq -4 & 4/1 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -2 & 2/1 \\ 2y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -1 & \end{array}$$

Primal-Dual Correspondences

Increasing y_1 means we pivot on row 1.

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\multicolumn{1}{r}{4/1} & 2/1 & & & & & \multicolumn{1}{|r}{} & \text{ratios}
\end{array}
$$

By how much can we increase the value of y_1?

$$
\begin{array}{r|c}
 & \text{ratio} \\
-y_1 - 4y_2 + y_3 \geq -4 & 4/1 \\
-y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -2 & 2/1 \\
2y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -1 &
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Any row having a negative rhs is a candidate pivot row.

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Any row having a negative rhs is a candidate pivot row.

Form the ratios with the negative entries in pivot row.

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Any row having a negative rhs is a candidate pivot row.

Form the ratios with the negative entries in pivot row.

The pivot column is given by the smallest ratio.

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{cccccccc|c|l}
 & \text{pivot column} & & & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & & & \\
\hline
 & -1 & \boxed{\text{-1}} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
 & -4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Any row having a negative rhs is a candidate pivot row.

Form the ratios with the negative entries in pivot row.

The pivot column is given by the smallest ratio.

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & \boxed{\text{-1}} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & \\
-2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & \\
\hline
-2 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 6 & \\
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
-1 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & & \\
1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & \\
-2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
\hline
-2 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 6 &
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
-1 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & & & & & \\
1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & \\
-2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & 1 & -1 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
\hline
-2 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 6 &
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & \\
-2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & 1 & -1 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
\hline
-2 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 6 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|}
1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 \\
-2 & 0 & 0 & -7/2 & 1 & -3/2 & 7/2 \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\
\hline
-2 & 0 & 0 & -9/2 & 0 & -5/2 & 17/2 \\
\end{array}
$$

1	1	-2	-1	0	0	3	
-2	0	-3	-2	1	0	2	
0	0	$\boxed{-2}$	1	0	1	-1	$\leftarrow$ pivot row
-2	0	-5	-2	0	0	6	

1	1	0	-2	0	-1	4	
-2	0	0	$-7/2$	1	$-3/2$	$7/2$	
0	0	1	$-1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	
-2	0	0	$-9/2$	0	$-5/2$	$17/2$	optimal

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & \\
-2 & 0 & 0 & -7/2 & 1 & -3/2 & 7/2 & \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & \\
\hline
-2 & 0 & 0 & -9/2 & 0 & -5/2 & 17/2 & \text{optimal}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{and}
$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & \\
-2 & 0 & 0 & -7/2 & 1 & -3/2 & 7/2 & \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & \\
\hline
-2 & 0 & 0 & -9/2 & 0 & -5/2 & 17/2 & \text{optimal}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{array}{|cccccc|c|l}
1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & \\
-2 & 0 & 0 & -7/2 & 1 & -3/2 & 7/2 & \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & \\
\hline
-2 & 0 & 0 & -9/2 & 0 & -5/2 & 17/2 & \text{optimal}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Optimal value $= -17/2$.

Apply the dual simplex algorithm to the following problem.

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
(\mathcal{P}) & \text{maximize} & -4x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & & \\
& \text{subject to} & -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & -3 \\
& & -4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -4 \\
& & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
& & & & \multicolumn{5}{l}{0 \leq x_1, x_2, x_3.}
\end{array}$$

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
-1 & \boxed{\text{-1}} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

The Dual Simplex Algorithm

-1	$\boxed{-1}$	2	1	0	0	-3	← pivot row
-4	-2	1	0	1	0	-4	
1	1	-1	0	0	1	2	
-4	-2	-1	0	0	0	0	

1	1	-2	-1	0	0	3
-2	0	-3	-2	1	0	2
0	0	1	1	0	1	-1
-2	0	-5	-2	0	0	6

-1	$\boxed{-1}$	2	1	0	0	-3	$\leftarrow$ pivot row
-4	-2	1	0	1	0	-4	
1	1	-1	0	0	1	2	
-4	-2	-1	0	0	0	0	

1	1	-2	-1	0	0	3	
-2	0	-3	-2	1	0	2	
0	0	1	1	0	1	-1	$\leftarrow$ pivot row
-2	0	-5	-2	0	0	6	

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & \boxed{\text{-1}} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & \\
-2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
\hline
-2 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 6 &
\end{array}
$$

No negative entry in the pivot row! What does this mean?

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
-1 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|cccccc|c|l}
1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & \\
-2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
\hline
-2 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 6 &
\end{array}
$$

No negative entry in the pivot row! What does this mean?

The dual problem is unbounded.

The Dual Simplex Algorithm

-1	$\boxed{-1}$	2	1	0	0	-3	$\leftarrow$ pivot row
-4	-2	1	0	1	0	-4	
1	1	-1	0	0	1	2	
-4	-2	-1	0	0	0	0	

1	1	-2	-1	0	0	3	
-2	0	-3	-2	1	0	2	
0	0	1	1	0	1	-1	$\leftarrow$ pivot row
-2	0	-5	-2	0	0	6	

No negative entry in the pivot row! What does this mean?

The dual problem is unbounded. What can you say about the primal problem?

The Dual Simplex Algorithm

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
-1 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
-4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|rrrrrr|r|l}
1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 3 & \\
-2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \leftarrow \text{ pivot row} \\
\hline
-2 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 6 &
\end{array}
$$

No negative entry in the pivot row! What does this mean?

The dual problem is unbounded. What can you say about the primal problem? The primal is necessarily infeasible by the Weak Duality Theorem.

Đơn hình vs. đơn hình đối ngẫu

Xét bài toán LP chính tắc.

- Thuật toán đơn hình:

  ,

- Thuật toán đơn hình đối ngẫu:

  ,

Đơn hình vs. đơn hình đối ngẫu

Xét bài toán LP chính tắc.

- Thuật toán đơn hình: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ, ,
- Thuật toán đơn hình đối ngẫu: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ đối ngẫu, ,

Đơn hình vs. đơn hình đối ngẫu

Xét bài toán LP chính tắc.

- Thuật toán đơn hình: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ, nhưng (có thể) không CNĐ đối ngẫu,
- Thuật toán đơn hình đối ngẫu: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ đối ngẫu, nhưng (có thể) không CNĐ,

Đơn hình vs. đơn hình đối ngẫu

Xét bài toán LP chính tắc.

- Thuật toán đơn hình: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ, nhưng (có thể) không CNĐ đối ngẫu, dừng khi cơ sở vừa CNĐ vừa CNĐ đối ngẫu.
- Thuật toán đơn hình đối ngẫu: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ đối ngẫu, nhưng (có thể) không CNĐ, dừng khi cơ sở vừa CNĐ vừa CNĐ đối ngẫu.

Đơn hình vs. đơn hình đối ngẫu

Xét bài toán LP chính tắc.

- Thuật toán đơn hình: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ, nhưng (có thể) không CNĐ đối ngẫu, dừng khi cơ sở vừa CNĐ vừa CNĐ đối ngẫu.
- Thuật toán đơn hình đối ngẫu: Xuất phát và trong mỗi bước có 1 cơ sở CNĐ đối ngẫu, nhưng (có thể) không CNĐ, dừng khi cơ sở vừa CNĐ vừa CNĐ đối ngẫu.

Cơ sở B là

- CNĐ nếu $A_B^{-1}b \geq 0$
- CNĐ đối ngẫu nếu $c^T - c_B^T A_B^{-1} A \leq 0$.

Khi nào thì dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

- Thuật toán đơn hình đối ngẫu trong thực tế nhanh hơn thuật toán đơn hình gốc.

[1] R. Bixby, Solving real-world linear programs: A decade and more of progress, *Operations Research*, Vol 50, No. 1, pp. 3-15, 2002

Khi nào thì dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

- Thuật toán đơn hình đối ngẫu trong thực tế nhanh hơn thuật toán đơn hình gốc. Có một số lí do, nhưng quan trọng nhất là việc sử dụng tiêu chuẩn "steepest edge" của Goldfarb để xác định biến rời cơ sở trong mỗi bước[1].

[1] R. Bixby, Solving real-world linear programs: A decade and more of progress, *Operations Research*, Vol 50, No. 1, pp. 3-15, 2002

Khi nào thì dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

- Thuật toán đơn hình đối ngẫu trong thực tế nhanh hơn thuật toán đơn hình gốc. Có một số lí do, nhưng quan trọng nhất là việc sử dụng tiêu chuẩn "steepest edge" của Goldfarb để xác định biến rời cơ sở trong mỗi bước[1].
- Nên sử dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu thay vì thuật toán đơn hình nếu ta đã có sẵn một cơ sở đối ngẫu.

[1] R. Bixby, Solving real-world linear programs: A decade and more of progress, *Operations Research*, Vol 50, No. 1, pp. 3-15, 2002

Khi nào thì dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

- Thuật toán đơn hình đối ngẫu trong thực tế nhanh hơn thuật toán đơn hình gốc. Có một số lí do, nhưng quan trọng nhất là việc sử dụng tiêu chuẩn "steepest edge" của Goldfarb để xác định biến rời cơ sở trong mỗi bước[1].
- Nên sử dụng thuật toán đơn hình đối ngẫu thay vì thuật toán đơn hình nếu ta đã có sẵn một cơ sở đối ngẫu. Việc này có thể xảy ra nếu ta đã giải xong nghiệm tối ưu của một LP, sau đó ta muốn
  - Thay đổi vế phải
  - Hay thêm một số điều kiện.

  Khi đó nghiệm cũ có thể không còn CNĐ nữa, tuy nhiên cơ sở của nó vẫn CNĐ đối ngẫu.

[1] R. Bixby, Solving real-world linear programs: A decade and more of progress, *Operations Research*, Vol 50, No. 1, pp. 3-15, 2002

Khi nào thì dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

Khi ta thay đổi b: do "reduced cost" không phụ thuộc vào b nên nó vẫn không dương và cơ sở đang có vẫn CNĐ đối ngẫu.

Khi nào thì dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

Khi ta thay đổi b: do "reduced cost" không phụ thuộc vào b nên nó vẫn không dương và cơ sở đang có vẫn CNĐ đối ngẫu.

Khi ta thêm một vài điều kiện bất đẳng thức vào tập điều kiện ràng buộc: ta chỉ cần thêm các biến bù tương ứng vào cơ sở mới. Khi đó các biến ngoài cơ sở vẫn giữ nguyên và "reduced cost" ứng với chúng hoàn toàn không thay đổi, tức là vẫn không dương, và do đó cơ sở mới cũng CNĐ đối ngẫu.

Khi nào thì dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

Khi ta thay đổi b: do "reduced cost" không phụ thuộc vào b nên nó vẫn không dương và cơ sở đang có vẫn CNĐ đối ngẫu.

Khi ta thêm một vài điều kiện bất đẳng thức vào tập điều kiện ràng buộc: ta chỉ cần thêm các biến bù tương ứng vào cơ sở mới. Khi đó các biến ngoài cơ sở vẫn giữ nguyên và "reduced cost" ứng với chúng hoàn toàn không thay đổi, tức là vẫn không dương, và do đó cơ sở mới cũng CNĐ đối ngẫu.

Lưu ý: Một điều kiện đẳng thức có thể biểu diễn qua 2 điều kiện bđt.

Luyện tập

Hãy giải LP sau dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximize} & -4x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{subject to} & x_1 & & & - & x_3 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & - & x_2 & & & \leq & -2 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & \multicolumn{7}{l}{0 \leq x_1, x_2, x_3}
\end{array}
$$

Tài liệu tham khảo

Mục 4.5, chương 4, D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, and J. Tsitsiklis (1997), Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific.