Đối ngẫu

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Hidden Hand of the Market Place: Duality

In the market place there is competition for raw materials, or the inputs to production. This collective competition is the *hidden hand* that sets the price for goods in the market place.

Is there a mathematical model for how these prices are set?

Let us think of the market as a separate agent in the market place. It is the agent that owns and sells the raw materials of production.

The goal of the market is to make the most money possible from its resources by setting the highest prices possible for them.

The market does not want to put the producers out of business, it just wants to take all of their profit.

How can we model this mathematically?

We answer this question in the context of the Plastic Cup Factory.

A local family-owned plastic cup manufacturer wants to optimize their production mix in order to maximize their profit. They produce personalized beer mugs and champagne glasses. The profit on a case of beer mugs is \$25 while the profit on a case of champagne glasses is \$20. The cups are manufactured with a machine called a plastic extruder which feeds on plastic resins. Each case of beer mugs requires 20 lbs. of plastic resins to produce while champagne glasses require 12 lbs. per case. The daily supply of plastic resins is limited to at most 1800 pounds. About 15 cases of either product can be produced per hour. At the moment the family wants to limit their work day to 8 hours.

Mô hình LP của bài toán xưởng sản xuất cốc nhựa

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximize} & 25x_1 & + & 20x_2 & & \\
\text{subject to} & 20x_1 & + & 12x_2 & \leq & 1800 \\
 & \frac{1}{15}x_1 & + & \frac{1}{15}x_2 & \leq & 8
\end{array}
$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Hidden Hand of the Market Place: Duality

By how much should the market increase the sale price of plastic resin and hourly labor in order to wipe out the profit for the Plastic Cup Factory?

Define

$$0 \leq y_1 = \text{price increase for a pound of resin}$$
$$0 \leq y_2 = \text{price increase for an hour of labor}$$

These price increases should wipe out the per unit profitability for cases of both beer mugs and champagne glasses.

Hidden Hand of the Market Place: Duality

$$\text{production cost increase} \geq \text{current profit}$$

$$\begin{array}{llll} & & & \text{current profit} \\ \text{Beer Mugs:} & \text{cost increase} & = 20y_1 + \frac{1}{15}y_2 & \geq 25 \\ \text{Champagne Glasses:} & \text{cost increase} & = 12y_1 + \frac{1}{15}y_2 & \geq 20 \end{array}$$

Hidden Hand of the Market Place: Duality

Now minimize the total increase in the cost of raw materials subject to wiping out the producer's profit. Hopefully this will keep the Plastic Cup Factory in business.

$$\text{minimize} \quad 1800y_1 + 8y_2$$

Rewriting the Market's price increase problem we get

$$\begin{array}{llcccc}
\text{minimize} & 1800y_1 & + & 8y_2 & & \\
 & & & & & \\
\text{subject to} & 20y_1 & + & y_2/15 & \geq & 15 \\
 & 12y_1 & + & y_2/15 & \geq & 20 \\
 & 0 \leq y_1, y_2 & & & &
\end{array}$$

This is another linear program!

Let us compare this LP with the original LP.

Linear Programming Duality

Prime:

$$\begin{aligned} \max\ & 25x_1 + 20x_2 \\ \text{s.t.}\ & 20x_1 + 12x_2 \leq 1800 \\ & \tfrac{1}{15}x_1 + \tfrac{1}{15}x_2 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \min\ & 1800y_1 + 8y_2 \\ \text{s.t.}\ & 20y_1 + \tfrac{1}{15}y_2 \geq 25 \\ & 12y_1 + \tfrac{1}{15}y_2 \geq 20 \\ & 0 \leq y_1, y_2 \end{aligned}$$

Linear Programming Duality: Matrix Notation

$(\mathcal{P})$	$(\mathcal{D})$
Primal: $\max \; c^T x$	**Dual:** $\min \; b^T y$
s.t. $Ax \leq b$	s.t. $A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

Linear Programming Duality: Matrix Notation

$(\mathcal{P})$

$$\textbf{Primal:}\quad \max\ c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax \le b,\quad x \ge 0$$

$(\mathcal{D})$

$$\textbf{Dual:}\quad \min\ b^T y \quad \text{s.t.}\ A^T y \ge c,\quad y \ge 0$$

Lưu ý: Bài toán đối ngẫu cũng có thể được xây dựng thông qua hàm Lagrange (xem tài liệu tham khảo).

The Dual of the Dual

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad\qquad (\mathcal{D}) \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \ge c \\ & y \ge 0. \end{array}$$

What is the dual to the dual?

The Dual of the Dual

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array} \quad \iff \quad \begin{array}{rl} -\max & (-b)^T y \\ \text{s.t.} & (-A^T)y \leq (-c) \\ & y \geq 0. \end{array}$$

The Dual of the Dual

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} -\max \quad & (-b)^T y \\ \text{s.t.} \quad & (-A^T) y \leq (-c) \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Đối ngẫu của nó là

$$\begin{aligned} -\min \quad & (-c)^T x \\ \text{s.t.} \quad & (-A^T)^T x \geq (-b) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

The Dual of the Dual

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} -\max \quad & (-b)^T y \\ \text{s.t.} \quad & (-A^T) y \leq (-c) \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Đối ngẫu của nó là

$$\begin{aligned} -\min \quad & (-c)^T x \\ \text{s.t.} \quad & (-A^T)^T x \geq (-b) \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

The dual of the dual is the primal.

Đối ngẫu trong trường hợp tổng quát

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{P} & \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I \\
& & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in E \\
& & x_j \geq 0, \quad j \in R.
\end{array}
$$

Here the index sets I, E, and R are such that

$$I \cap E = \varnothing, I \cup E = \{1, 2, \ldots, m\}, \text{ and } R \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Lưu ý: với max bất đẳng thức ở dạng $\leq$ còn với min bất đẳng thức ở dạng $\geq$.

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	Restricted Variables

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	Restricted Variables
Equality Constraints	

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	Restricted Variables
Equality Constraints	Free Variables

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	Restricted Variables
Equality Constraints	Free Variables
Restricted Variables	

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	Restricted Variables
Equality Constraints	Free Variables
Restricted Variables	Inequality Constraints

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	Restricted Variables
Equality Constraints	Free Variables
Restricted Variables	Inequality Constraints
Free Variables	

Primal-Dual Correspondences

In the Primal	In the Dual
Maximization	Minimization
Inequality Constraints	Restricted Variables
Equality Constraints	Free Variables
Restricted Variables	Inequality Constraints
Free Variables	Equality Constraints

Primal-Dual Correspondences

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{P} \quad \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i \in I \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\
& x_j \ge 0, & j \in R.
\end{array}
$$

$F = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus R =$ the free variables

Primal-Dual Correspondences

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{P} & \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i \in I \\
& & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\
& & x_j \ge 0, & j \in R.
\end{array}
$$

$F = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus R =$ the free variables

$\mathcal{D}$

Primal-Dual Correspondences

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{P} & \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \\
& & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\
& & x_j \geq 0, & j \in R.
\end{array}
$$

$F = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus R =$ the free variables

$\mathcal{D}$ minimize

Primal-Dual Correspondences

$$\begin{array}{llll} \mathcal{P} & \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ & \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \\ & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\ & & x_j \geq 0, & j \in R. \end{array}$$

$F = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus R =$ the free variables

$$\begin{array}{lll} \mathcal{D} & \text{minimize} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \end{array}$$

Primal-Dual Correspondences

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{P} & \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \\
& & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\
& & x_j \geq 0, & j \in R.
\end{array}
$$

$F = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus R =$ the free variables

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{D} & \text{minimize} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
& \text{subject to} &
\end{array}
$$

Primal-Dual Correspondences

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{P} & \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \\
& & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\
& & x_j \geq 0, & j \in R.
\end{array}
$$

$F = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus R =$ the free variables

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{D} & \text{minimize} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
& \text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j \in R
\end{array}
$$

Primal-Dual Correspondences

$$\begin{array}{llll} \mathcal{P} & \text{maximize} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ & \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & i \in I \\ & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\ & & x_j \ge 0, & j \in R. \end{array}$$

$F = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus R =$ the free variables

$$\begin{array}{llll} \mathcal{D} & \text{minimize} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ & \text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, & j \in R \\ & & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, & j \in F \\ & & y_i \ge 0, & i \in I. \end{array}$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 10 \\
 & x_3 & \multicolumn{6}{l}{\geq 0}
\end{array}
$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 & \quad y_1 \geq 0 \\
 & -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 & \quad y_2 \text{ free} \\
 & x_1 & & & & & \leq & 10 & \quad y_3 \geq 0 \\
 & x_3 & \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 & \quad y_1 \geq 0 \\
 & -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 & \quad y_2 \text{ free} \\
 & x_1 & & & & & \leq & 10 & \quad y_3 \geq 0 \\
 & x_3 & \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

---

minimize

$$y_1 \geq 0, \; y_3 \geq 0$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 & \quad y_1 \geq 0 \\
& -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 & \quad y_2 \text{ free} \\
& x_1 & & & & & \leq & 10 & \quad y_3 \geq 0 \\
& x_3 & \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\text{minimize} \quad 8y_1 \; + \; 10y_2 \; + \; 10y_3
$$

$$
y_1 \geq 0, \; y_3 \geq 0
$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 & \quad y_1 \geq 0 \\
 & -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 & \quad y_2 \text{ free} \\
 & x_1 & & & & & \leq & 10 & \quad y_3 \geq 0 \\
 & x_3 & \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{minimize} & 8y_1 & + & 10y_2 & + & 10y_3 \\
\text{subject to} & & & & &
\end{array}
$$

$$y_1 \geq 0, \; y_3 \geq 0$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 & \quad y_1 \geq 0 \\
 & -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 & \quad y_2 \text{ free} \\
 & x_1 & & & & & \leq & 10 & \quad y_3 \geq 0 \\
 & x_3 & \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{minimize} & 8y_1 & + & 10y_2 & + & 10y_3 & & \\
\text{subject to} & 5y_1 & - & y_2 & + & y_3 & = & 1
\end{array}
$$

$$y_1 \geq 0, \; y_3 \geq 0$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 & \quad y_1 \geq 0 \\
& -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 & \quad y_2 \text{ free} \\
& x_1 & & & & & \leq & 10 & \quad y_3 \geq 0 \\
& x_3 & \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{minimize} & 8y_1 & + & 10y_2 & + & 10y_3 & & \\
\text{subject to} & 5y_1 & - & y_2 & + & y_3 & = & 1 \\
& y_1 & + & 5y_2 & & & = & -2
\end{array}
$$

$$y_1 \geq 0, \; y_3 \geq 0$$

Example: General Duality

Compute the dual of the LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{maximize} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{subject to} & 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 & y_1 \geq 0 \\
 & -x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 10 & y_2 \text{ free} \\
 & x_1 & & & & & \leq & 10 & y_3 \geq 0 \\
 & x_3 & \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{minimize} & 8y_1 & + & 10y_2 & + & 10y_3 & & \\
\text{subject to} & 5y_1 & - & y_2 & + & y_3 & = & 1 \\
 & y_1 & + & 5y_2 & & & = & -2 \\
 & -2y_1 & + & 8y_2 & & & \geq & 3
\end{array}
$$

$$y_1 \geq 0, \; y_3 \geq 0$$

Second Example: General Duality

Primal

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\
& 10x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & \leq & 20 \\
& 5x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\
& x_1 & & & & & \leq & 6 \\
& x_2 \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Second Example: General Duality

Primal

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\
 & 10x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & \leq & 20 \\
 & 5x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 6 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 4y_1 & + & 20y_2 & + & 3y_3 & + & 6y_4 & & \\
\text{s.t.} & y_1 & + & 10y_2 & + & 5y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
 & 5y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & \geq & -3 \\
 & -2y_1 & - & 5y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\
 & \multicolumn{9}{l}{y_2 \geq 0,\ y_4 \geq 0.}
\end{array}
$$

Tính đồng nhất của bài toán đối ngẫu

Như ta đã biết mỗi bài toán quy hoạch tuyến tính có thể viết ở dưới nhiều dạng khác nhau. Ví dụ như ta có thể đưa về dạng chính tắc, chuẩn tắc, ...

Tính đồng nhất của bài toán đối ngẫu

Như ta đã biết mỗi bài toán quy hoạch tuyến tính có thể viết ở dưới nhiều dạng khác nhau. Ví dụ như ta có thể đưa về dạng chính tắc, chuẩn tắc, ...

Câu hỏi đặt ra là liệu các bài toán đối ngẫu của các dạng khác nhau đó có tương đương hay không?

Ví dụ 1:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (\mathcal{D}) \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Tính đồng nhất của bài toán đối ngẫu

Ta có thể thêm biến bù để chuyển $\mathcal{P}$ về dạng chính tắc

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Iz = b \\ & x, z \geq 0. \end{aligned}$$

Tính đồng nhất của bài toán đối ngẫu

Ta có thể thêm biến bù để chuyển $\mathcal{P}$ về dạng chính tắc

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Iz = b \\ & x, z \geq 0. \end{aligned}$$

Nó có thể được viết lại thành

$$(\mathcal{P}') \quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x + \mathbf{0}^T z \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b \\ & x, z \geq 0 \end{aligned}$$

Tính đồng nhất của bài toán đối ngẫu

Ta có thể thêm biến bù để chuyển $\mathcal{P}$ về dạng chính tắc

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Iz = b \\ & x, z \geq 0. \end{aligned}$$

Nó có thể được viết lại thành

$$(\mathcal{P}') \quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x + \mathbf{0}^T z \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b \\ & x, z \geq 0 \end{aligned} \qquad (\mathcal{D}') \quad \begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A^T \\ I^T \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Điều kiện của (D') chính là $A^T y \geq c$, $y \geq 0$ (điều kiện của (D)).

Tính đồng nhất của bài toán đối ngẫu

Ví dụ 2:

$$(\mathcal{P}) \quad \max \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

$$(\mathcal{D}) \quad \min \quad b^T y \qquad \text{s.t.} \quad A^T y \geq c.$$

Ta có thể đưa $(\mathcal{P})$ về dạng chuẩn tắc

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}') \quad \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Bài tập về nhà: Hãy chứng minh bài toán đối ngẫu của $(\mathcal{P}')$ tương đương với $(\mathcal{D})$.

Một số kết quả đối ngẫu

Trong phần sau đây chúng ta sẽ trình bày một số kết quả đối ngẫu. Chúng ta xét bài toán gốc (primal) ở dạng chính tắc, tức là ta xét

$$(\mathcal{P}) \quad \max \quad c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \qquad\qquad (\mathcal{D}) \quad \min \quad b^T y \quad \text{s.t.} \quad A^T y \geq c.$$

Một số kết quả đối ngẫu

Trong phần sau đây chúng ta sẽ trình bày một số kết quả đối ngẫu. Chúng ta xét bài toán gốc (primal) ở dạng chính tắc, tức là ta xét

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad (\mathcal{D}) \quad \begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y \geq c. \end{aligned}$$

Kết quả cho trường hợp tổng quát có thể chứng minh trực tiếp tương tự hoặc gián tiếp bằng cách chuyển bài toán tổng quát về dạng chính tắc và áp dụng các kết quả này.

Định lý đối ngẫu yếu (weak duality theorem)

Định lý (weak duality theorem)

Nếu $x \in \mathbb{R}^n$ *là một nghiệm CNĐ của* $(\mathcal{P})$ *và* $y \in \mathbb{R}^m$ *là một nghiệm CNĐ của* $(\mathcal{D})$*, thì*

$$c^T x \leq y^T A x \leq b^T y.$$

Hệ quả

Nếu $(\mathcal{P})$ *không bị chặn thì* $(\mathcal{D})$ *không có nghiệm CNĐ.*
Nếu $(\mathcal{D})$ *không bị chặn thì* $(\mathcal{P})$ *không có nghiệm CNĐ.*
Nếu $c^T \overline{x} = b^T \overline{y}$ *với* $\overline{x}$ *là một nghiệm CNĐ của* $(\mathcal{P})$ *và* $\overline{y}$ *là một nghiệm CNĐ của* $(\mathcal{D})$ *thì* $\overline{x}$ *là nghiệm tối ưu của* $(\mathcal{P})$ *và* $\overline{y}$ *là nghiệm tối ưu của* $(\mathcal{D})$*.*

Định lý đối ngẫu yếu - Chứng minh

$$
\begin{aligned}
c^T x &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j) x_j \qquad [0 \leq x_j, c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \Rightarrow c_j x_j \leq (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i) x_j] \\
&= y^T A x \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) y_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad [\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i] \\
&= b^T y
\end{aligned}
$$

Định lý đối ngẫu mạnh (Strong Duality Theorem)

Định lý

Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu thì bài toán đối ngẫu của nó cũng có nghiệm tối ưu và hai giá trị tối ưu bằng nhau.

Định lý đối ngẫu mạnh (Strong Duality Theorem)

Định lý

Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu thì bài toán đối ngẫu của nó cũng có nghiệm tối ưu và hai giá trị tối ưu bằng nhau.

Hệ quả

Nếu bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều có nghiệm CNĐ thì cả hai bài toán có nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu bằng nhau.

Định lý đối ngẫu mạnh (Strong Duality Theorem)

Định lý

Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu thì bài toán đối ngẫu của nó cũng có nghiệm tối ưu và hai giá trị tối ưu bằng nhau.

Hệ quả

Nếu bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều có nghiệm CNĐ thì cả hai bài toán có nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu bằng nhau.

Chứng minh.

Nếu bài toán gốc có nghiệm CNĐ thì hoặc nó có nghiệm tối ưu hoặc không bị chặn. Nhưng do bài toán đối ngẫu có nghiệm CNĐ nên nó không thể không bị chặn (theo hệ quả). Từ đó suy ra cả 2 bài toán có nghiệm tối ưu theo định lý đối ngẫu mạnh. □

Chứng minh định lý đối ngẫu mạnh

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}) \quad \max \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

với A có các hàng độc lập tuyến tính.

Chứng minh định lý đối ngẫu mạnh

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$(\mathcal{P}) \quad \max \quad c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

với A có các hàng độc lập tuyến tính.

Sử dụng thuật toán đơn hình (với quy tắc xoay tránh vòng) ta có thể tìm được một cơ sở B tối ưu. Đặt $x_B = A_B^{-1} b$.

Chứng minh định lý đối ngẫu mạnh

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

với A có các hàng độc lập tuyến tính.

Sử dụng thuật toán đơn hình (với quy tắc xoay tránh vòng) ta có thể tìm được một cơ sở B tối ưu. Đặt $x_B = A_B^{-1} b$.

Điều kiện dừng của thuật toán đơn hình là "reduced cost" không dương

$$c^T - c_B^T A_B^{-1} A \leq \mathbf{0}^T.$$

Chú ý rằng

$$\begin{pmatrix} c_B^T & c_N^T \end{pmatrix} - c_B^T A_B^{-1} \begin{pmatrix} A_B & A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \end{pmatrix}.$$

Chứng minh định lý đối ngẫu mạnh

Đặt $y^T = c_B^T A_B^{-1}$ ta có

$$c^T - y^T A \leq 0^T \quad \text{hay} \quad A^T y \geq c,$$

tức là y là một nghiệm CNĐ của bài toán đối ngẫu.

Chứng minh định lý đối ngẫu mạnh

Đặt $y^T = c_B^T A_B^{-1}$ ta có

$$c^T - y^T A \leq 0^T \quad \text{hay} \quad A^T y \geq c,$$

tức là y là một nghiệm CNĐ của bài toán đối ngẫu.

Mặt khác ta có

$$y^T b = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x$$

với $x_N = 0$. Do đó từ định lý đối ngẫu yếu ta có y là nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Chứng minh định lý đối ngẫu mạnh

Đặt $y^T = c_B^T A_B^{-1}$ ta có

$$c^T - y^T A \leq 0^T \quad \text{hay} \quad A^T y \geq c,$$

tức là y là một nghiệm CNĐ của bài toán đối ngẫu.

Mặt khác ta có

$$y^T b = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x$$

với $x_N = 0$. Do đó từ định lý đối ngẫu yếu ta có y là nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Lưu ý: Từ chứng minh trên ta thấy rằng kết thúc thuật toán đơn hình ta cũng có thể đồng thời tìm ra một nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Complementary Slackness (Độ lệch bù)

Consider

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (\mathcal{D}) \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0. \end{array}$$

The SDT implies that x solves $(\mathcal{P})$ and y solves $(\mathcal{D})$ if and only if (x, y) is a $(\mathcal{P}) - (\mathcal{D})$ feasible pair and

$$c^T x = y^T A x = b^T y.$$

We now examine the consequence of this equivalence.

Complementary Slackness

The equation $c^T x = y^T A x$ implies that

$$0 = x^T(A^T y - c) = \sum_{j=1}^{n} x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j). \qquad (*)$$

$(\mathcal{P}) - (\mathcal{D})$ feasibility gives

$$0 \le x_j \qquad \text{and} \qquad 0 \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j \quad \text{for } j = 1, \ldots, n.$$

Hence, $(*)$ can only hold if

$$x_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j) = 0 \text{ for } \; j = 1, \ldots, n, \quad \text{or equivalently,}$$

$$x_j = 0 \qquad \text{or} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \qquad \text{or both for } j = 1, \ldots, n.$$

Complementary Slackness

Similarly, the equation $y^T Ax = b^T y$ implies that

$$0 = y^T(b - Ax) = \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j). \qquad \begin{pmatrix} 0 \le y_i \\ 0 \le b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \end{pmatrix}$$

Therefore, $y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Hence,

$$y_i = 0 \qquad \text{or} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \text{or both for } i = 1, \ldots, m.$$

Complementary Slackness

Similarly, the equation $y^T Ax = b^T y$ implies that

$$0 = y^T(b - Ax) = \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j). \qquad \begin{pmatrix} 0 \le y_i \\ 0 \le b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \end{pmatrix}$$

Complementary Slackness

Similarly, the equation $y^T Ax = b^T y$ implies that

$$0 = y^T(b - Ax) = \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j). \qquad \begin{pmatrix} 0 \le y_i \\ 0 \le b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \end{pmatrix}$$

Therefore, $y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Hence,

$$y_i = 0 \qquad \text{or} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad \text{or both for } i = 1, \ldots, m.$$

Complementary Slackness

$$c^T x = y^T A x = b^T y$$

$$\iff$$

Complementary Slackness

$$c^T x = y^T A x = b^T y$$

$$\iff$$

- $x_j = 0$ or $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j$ or both for $j = 1, \ldots, n$.

Complementary Slackness

$$c^T x = y^T A x = b^T y$$

$$\Longleftrightarrow$$

- $x_j = 0$ or $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j$ or both for $j = 1, \ldots, n$.
- $y_i = 0$ or $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ or both for $i = 1, \ldots, m$.

Complementary Slackness Theorem

Định lý

The vector $x \in \mathbb{R}^n$ solves $(\mathcal{P})$ and the vector $y \in \mathbb{R}^m$ solves $(\mathcal{D})$ if and only if x is feasible for $\mathcal{P}$ and y is feasible for $\mathcal{D}$ and

- *either $x_j = 0$ or $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j$ or both for $j = 1, \ldots, n$, and*
- *$y_i = 0$ or $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ or both for $i = 1, \ldots, m$.*

Complementary Slackness Theorem

Định lý

The vector $x \in \mathbb{R}^n$ solves $(\mathcal{P})$ and the vector $y \in \mathbb{R}^m$ solves $(\mathcal{D})$ if and only if x is feasible for $\mathcal{P}$ and y is feasible for $\mathcal{D}$ and

- *either $x_j = 0$ or $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j$ or both for $j = 1, \ldots, n$, and*
- *$y_i = 0$ or $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ or both for $i = 1, \ldots, m$.*

Hệ quả

The vector $x \in \mathbb{R}^n$ solves $\mathcal{P}$ if and only if x is feasible for $\mathcal{P}$ and there exists a vector $y \in \mathbb{R}^m$ feasible for $\mathcal{D}$ and such that

(i) *if $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$, then $y_i = 0$, for $i = 1, \ldots, m$ and*

(ii) *if $x_j > 0$, then $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, for $j = 1, \ldots, n$.*

Định lý độ lệch bù cho LP dạng tổng quát

$$
(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \le b_i, & i \in I \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i \in E \\ & x_j \ge 0, & j \in R. \end{array}
\qquad
(\mathcal{D}) \quad \begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i & \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \ge c_j, & j \in R \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, & j \in F \\ & y_i \ge 0, & i \in I. \end{array}
$$

Định lý

The vector $x \in \mathbb{R}^n$ solves $(\mathcal{P})$ and the vector $y \in \mathbb{R}^m$ solves $(\mathcal{D})$ if and only if x is feasible for $\mathcal{P}$ and y is feasible for $\mathcal{D}$ and

- *either $x_j = 0$ or $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_j = c_j$ or both for $j \in R$, and*
- *$y_i = 0$ or $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ or both for $i \in I$.*

Testing Optimality via Complementary Slacknes

Does

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$$

solve the LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{maximize} & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{subject to} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& \multicolumn{11}{l}{0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.}
\end{array}$$

Testing Optimality via Complementary Slacknes

Does

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$$

solve the LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrl}
\text{maximize} & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & & \\
\text{subject to} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 & : \ {\color{red}y_1} \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 & : \ {\color{red}y_2} \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 & : \ {\color{red}y_3} \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 & : \ {\color{red}y_4} \\
 & \multicolumn{12}{l}{0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.}
\end{array}$$

Testing Optimality via Complementary Slackness

The point

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$$

must be feasible for the LP

Testing Optimality via Complementary Slackness

The point

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$$

must be feasible for the LP

Plugging into the constraints we get

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(0) & + & 3(\frac{4}{3}) & + & 5(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 2(0) & = & 4 \\
4(0) & + & 2(\frac{4}{3}) & - & 2(\frac{2}{3}) & + & (\frac{5}{3}) & + & (0) & = & 3 \\
2(0) & + & 4(\frac{4}{3}) & + & 4(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 5(0) & < & 5 \\
3(0) & + & (\frac{4}{3}) & + & 2(\frac{2}{3}) & - & (\frac{5}{3}) & - & 2(0) & = & 1.
\end{array}$$

Testing Optimality via Complementary Slackness

The point

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$$

must be feasible for the LP

Plugging into the constraints we get

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
(0) & + & 3(\frac{4}{3}) & + & 5(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 2(0) & = & 4 \\
4(0) & + & 2(\frac{4}{3}) & - & 2(\frac{2}{3}) & + & (\frac{5}{3}) & + & (0) & = & 3 \\
2(0) & + & 4(\frac{4}{3}) & + & 4(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 5(0) & < & 5 \\
3(0) & + & (\frac{4}{3}) & + & 2(\frac{2}{3}) & - & (\frac{5}{3}) & - & 2(0) & = & 1.
\end{array}$$

Can we use this information to construct a solution to the dual problem, (y_1, y_2, y_3, y_4)?

Testing Optimality via Complementary Slackness

Recall that

if $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b$, then $y_i = 0$, for $i = 1, \ldots, m$.

We have just showed that

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
(0) & + & 3(\frac{4}{3}) & + & 5(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 2(0) & = & 4 \\
4(0) & + & 2(\frac{4}{3}) & - & 2(\frac{2}{3}) & + & (\frac{5}{3}) & + & (0) & = & 3 \\
2(0) & + & 4(\frac{4}{3}) & + & 4(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 5(0) & < & 5 \\
3(0) & + & (\frac{4}{3}) & + & 2(\frac{2}{3}) & - & (\frac{5}{3}) & - & 2(0) & = & 1
\end{array}$$

Testing Optimality via Complementary Slackness

Recall that

if $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b$, then $y_i = 0$, for $i = 1, \ldots, m$.

We have just showed that

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}
(0) & + & 3(\frac{4}{3}) & + & 5(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 2(0) & = & 4 & : \color{red}{y_1} \\
4(0) & + & 2(\frac{4}{3}) & - & 2(\frac{2}{3}) & + & (\frac{5}{3}) & + & (0) & = & 3 & : \color{red}{y_2} \\
2(0) & + & 4(\frac{4}{3}) & + & 4(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 5(0) & < & 5 & : \color{red}{y_3} \\
3(0) & + & (\frac{4}{3}) & + & 2(\frac{2}{3}) & - & (\frac{5}{3}) & - & 2(0) & = & 1 & : \color{red}{y_4}
\end{array}$$

Testing Optimality via Complementary Slackness

Recall that

if $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b$, then $y_i = 0$, for $i = 1, \ldots, m$.

We have just showed that

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
(0) & + & 3(\frac{4}{3}) & + & 5(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 2(0) & = & 4 & : & y_1 \\
4(0) & + & 2(\frac{4}{3}) & - & 2(\frac{2}{3}) & + & (\frac{5}{3}) & + & (0) & = & 3 & : & y_2 \\
2(0) & + & 4(\frac{4}{3}) & + & 4(\frac{2}{3}) & - & 2(\frac{5}{3}) & + & 5(0) & < & 5 & : & y_3 = 0 \\
3(0) & + & (\frac{4}{3}) & + & 2(\frac{2}{3}) & - & (\frac{5}{3}) & - & 2(0) & = & 1 & : & y_4
\end{array}
$$

Testing Optimality via Complementary Slackness

Also recall that

if $0 < x_j$, then $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, for $j = 1, \ldots, n$.

Hence,

$$3y_1 \quad + \quad 2y_2 \quad + \quad 4y_3 \quad + \quad y_4 \quad = \quad 6 \qquad (x_2 = \tfrac{4}{3} > 0)$$

Testing Optimality via Complementary Slackness

Also recall that

if $0 < x_j$, then $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, for $j = 1, \ldots, n$.

Hence,

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & = & 6 & \quad (x_2 = \frac{4}{3} > 0) \\ 5y_1 & - & 2y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & = & 5 & \quad (x_3 = \frac{2}{3} > 0) \end{array}$$

Testing Optimality via Complementary Slackness

Also recall that

if $0 < x_j$, then $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, for $j = 1, \ldots, n$.

Hence,

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & = & 6 & \quad (x_2 = \frac{4}{3} > 0) \\ 5y_1 & - & 2y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & = & 5 & \quad (x_3 = \frac{2}{3} > 0) \\ -2y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & - & y_4 & = & -2 & \quad (x_4 = \frac{5}{3} > 0) \end{array}$$

Combining these observations gives the system

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

which any dual solution must satisfy.

This is a square system that we can try to solve for y.

Testing Optimality via Complementary Slackness

3	2	4	1	6	
5	-2	4	2	5	
-2	1	-2	-1	-2	
0	0	1	0	0	
3	2	0	1	6	$r_1 - 4r_4$
5	-2	0	2	5	$r_2 - 4r_4$
-2	1	0	-1	-2	$r_3 + 2r_4$
0	0	1	0	0	
1	3	0	0	4	$r_1 + r_3$
1	0	0	0	1	$r_2 + 2r_3$
-2	1	0	-1	-2	
0	0	1	0	0	

1	3	0	0	4	$r_1 + r_3$
1	0	0	0	1	$r_2 + 2r_3$
-2	1	0	-1	-2	
0	0	1	0	0	
0	3	0	0	3	$r_1 - r_2$
1	0	0	0	1	
0	1	0	-1	0	$r_3 + 2r_2$
0	0	1	0	0	
1	0	0	0	1	r_2
0	1	0	0	1	$\frac{1}{3}r_1$
0	0	1	0	0	r_4
0	0	0	1	1	$-r_3 + \frac{1}{3}r_1$

This gives the solution $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 1, 0, 1)$.

Is this dual feasible?

Testing Optimality via Complementary Slackness

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 1, 0, 1)$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{minimize} & 4y_1 & + & 3y_2 & + & 5y_3 & + & y_4 & & \\
\text{subject to} & y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & \geq & 7 \\
 & 3y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & \geq & 6 \\
 & 5y_1 & - & 2y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & \geq & 5 \\
 & -2y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & - & y_4 & \geq & -2 \\
 & 2y_1 & + & y_2 & + & 5y_3 & - & 2y_4 & \geq & 3 \\
 & \multicolumn{9}{l}{0 \leq y_1, y_2, y_3, y_4.}
\end{array}
$$

Clearly, $0 \leq y$ and by construction the 2nd, 3rd, and 4th of the linear inequality constraints are satisfied with equality.

We need to check the first and inequalities.

First: $1 + 4 + 0 + 3 = 8 > 7$

Fifth: $2 + 1 + 0 - 2 = 1 \not\geq 3$, the fifth dual inequality is violated.

Hence, $x = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ cannot be optimal!

Example: Testing Optimality via Complementary Slackness

Does the point $x = (1, 1, 1, 0)$ solve the following LP?

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{maximize} & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{subject to} & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 7 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \\
& x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 2 \\
& \multicolumn{9}{l}{0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4.}
\end{array}
$$

Tài liệu tham khảo

Chương 4, D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, and J. Tsitsiklis (1997), Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific.