

Thuật toán đơn hình - Tính đúng đắn

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chính tắc

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

với $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ và $\text{rank}(A) = m$.

Nhắc lại - bảng đơn hình

B là tập chỉ số các biến cơ sở, N là tập chỉ số các biến ngoài cơ sở.

$$\begin{array}{cc|c} A_B & A_N & b \\ \hline c_B^T & c_N^T & 0 \end{array}$$

Nhắc lại - bảng đơn hình

B là tập chỉ số các biến cơ sở, N là tập chỉ số các biến ngoài cơ sở.

$$\begin{array}{cc|c} A_B & A_N & b \\ \hline c_B^T & c_N^T & 0 \end{array}$$

Đưa ma trận A_B về ma trận đơn vị

$$\begin{array}{cc|c} I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline c_B^T & c_N^T & 0 \end{array}$$

Lưu ý: Để B là 1 cơ sở chấp nhận được thì $A_B^{-1}b \geq 0$.

Nhắc lại - bảng đơn hình

B là tập chỉ số các biến cơ sở, N là tập chỉ số các biến ngoài cơ sở.

$$\begin{array}{cc|c} A_B & A_N & b \\ \hline c_B^T & c_N^T & 0 \end{array}$$

Đưa ma trận A_B về ma trận đơn vị

$$\begin{array}{cc|c} I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline c_B^T & c_N^T & 0 \end{array}$$

Lưu ý: Để B là 1 cơ sở chấp nhận được thì $A_B^{-1}b \geq 0$.

Biểu diễn hàm mục tiêu qua các biến ngoài cơ sở, hay đưa c_B về 0

$$\begin{array}{cc|c} I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & \bar{c}^T & \bar{z} \end{array}$$

Để làm việc đó ta nhân hàng điều kiện i với $-c_B^i$ rồi cộng vào hàng hàm mục tiêu, tức là $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N.$$

\bar{c} được gọi là *reduced cost* và là tiêu chuẩn để kiểm tra tính tối ưu của nghiệm cơ sở chấp nhận được hiện tại, kí hiệu \bar{x} .

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N.$$

\bar{c} được gọi là *reduced cost* và là tiêu chuẩn để kiểm tra tính tối ưu của nghiệm cơ sở chấp nhận được hiện tại, kí hiệu \bar{x} . Nghiệm đó được tính theo công thức

$$\bar{x}_B = A_B^{-1} b, \bar{x}_N = 0$$

Reduced cost

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N.$$

\bar{c} được gọi là *reduced cost* và là tiêu chuẩn để kiểm tra tính tối ưu của nghiệm cơ sở chấp nhận được hiện tại, kí hiệu \bar{x} . Nghiệm đó được tính theo công thức

$$\bar{x}_B = A_B^{-1} b, \quad \bar{x}_N = 0$$

với giá trị hàm mục tiêu

$$c^T \bar{x} = c_B^T \bar{x}_B + c_N^T \bar{x}_N = c_B^T A_B^{-1} b.$$

Điều kiện tối ưu

Với nghiệm chấp nhận được y bất kì ta có

$$b = Ay = A_{BY}B + A_{NY}N.$$

Điều kiện tối ưu

Với nghiệm chấp nhận được y bất kì ta có

$$b = Ay = A_B y_B + A_N y_N.$$

Suy ra

$$y_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N y_N.$$

Điều kiện tối ưu

Với nghiệm chấp nhận được y bất kì ta có

$$b = Ay = A_B y_B + A_N y_N.$$

Suy ra

$$y_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N y_N.$$

Do đó ta có

$$c^T y = c_B^T y_B + c_N^T y_N$$

(1)

Điều kiện tối ưu

Với nghiệm chấp nhận được y bất kì ta có

$$b = Ay = A_B y_B + A_N y_N.$$

Suy ra

$$y_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N y_N.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} c^T y &= c_B^T y_B + c_N^T y_N \\ &= c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N y_N) + c_N^T y_N \end{aligned}$$

(1)

Điều kiện tối ưu

Với nghiệm chấp nhận được y bất kì ta có

$$b = Ay = A_B y_B + A_N y_N.$$

Suy ra

$$y_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N y_N.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}c^T y &= c_B^T y_B + c_N^T y_N \\ &= c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N y_N) + c_N^T y_N \\ &= c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) y_N\end{aligned}$$

(1)

Điều kiện tối ưu

Với nghiệm chấp nhận được y bất kì ta có

$$b = Ay = A_{BY}y_B + A_{NY}y_N.$$

Suy ra

$$y_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_{NY}y_N.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}c^T y &= c_B^T y_B + c_N^T y_N \\ &= c_B^T (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_{NY}y_N) + c_N^T y_N \\ &= c_B^T A_B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_{NY})y_N \\ &= c^T \bar{x} + \bar{c}^T y_N.\end{aligned}\tag{1}$$

Điều kiện tối ưu

Với nghiệm chấp nhận được y bất kì ta có

$$b = Ay = A_{BY}y_B + A_{NY}y_N.$$

Suy ra

$$y_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_{NY}y_N.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}c^T y &= c_B^T y_B + c_N^T y_N \\ &= c_B^T (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_{NY}y_N) + c_N^T y_N \\ &= c_B^T A_B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_{NY})y_N \\ &= c^T \bar{x} + \bar{c}^T y_N.\end{aligned}\tag{1}$$

Nếu $\bar{c} \leq 0$ thì vì $y_N \geq 0$ nên ta có

$$c^T y \leq c^T \bar{x},$$

tức là \bar{x} là nghiệm tối ưu. Như vậy tiêu chuẩn dừng là đúng.

Các bước của thuật toán đơn hình (phiên bản cơ sở)

Pha 1 (xuất phát):

- ▶ Xác định một cơ sở chấp nhận được B để xuất phát hay chứng minh bài toán vô nghiệm.
- ▶ Nếu bài toán có nghiệm chấp nhận được tính

$$\bar{A} = A_B^{-1}A_N, \bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N.$$

Các bước của thuật toán đơn hình (phiên bản cơ sở)

Pha 1 (xuất phát):

- ▶ Xác định một cơ sở chấp nhận được B để xuất phát hay chứng minh bài toán vô nghiệm.
- ▶ Nếu bài toán có nghiệm chấp nhận được tính

$$\bar{A} = A_B^{-1}A_N, \bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N.$$

Chúng ta sẽ quay trở lại pha 1 trong phần thuật toán đơn hình hai pha sau.

Các bước của thuật toán đơn hình (phiên bản cơ sở)

Pha 2 (tối ưu hóa):

- 1: **if** $\bar{c} \leq 0$ **then**
- 2: Nghiệm ứng với cơ sở hiện tại là tối ưu, return.
- 3: **else**
- 4: Chọn một biến ngoài cơ sở x_j có hệ số $\bar{c}_j > 0$.
- 5: **if** $\bar{A}_{.j} \leq 0$ **then**
- 6: Bài toán không bị chặn, return.
- 7: **else**
- 8: Xét các dòng có $\bar{A}_{ij} > 0$ và tỉ số $\frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ij}}$.
- 9: Chọn một dòng k có tỉ số nhỏ nhất.
- 10: Tiến hành phép xoay, cập nhật cơ sở, \bar{A} , \bar{b} và \bar{c} .
- 11: Quay lại bước 1.

Tính đúng đắn của thuật toán

Định lý

Nếu tất cả các cơ sở không suy biến và bài toán có nghiệm chấp nhận được thì phiên bản cơ sở của thuật toán đơn hình hoạt động đúng, tức là sau hữu hạn bước hoặc sẽ tìm được nghiệm tối ưu hoặc kết luận rằng bài toán không bị chặn.

Tính đúng đắn của thuật toán

Định lý

Nếu tất cả các cơ sở không suy biến và bài toán có nghiệm chấp nhận được thì phiên bản cơ sở của thuật toán đơn hình hoạt động đúng, tức là sau hữu hạn bước hoặc sẽ tìm được nghiệm tối ưu hoặc kết luận rằng bài toán không bị chặn.

Chứng minh.

Ta đã thấy tiêu chuẩn dừng cho nghiệm tối ưu là đúng. Trường hợp kết luận không bị chặn cũng dễ thấy. Như vậy chỉ cần phải chứng minh mỗi bước ta đều nhận được 1 BFS và thuật toán dừng sau hữu hạn bước.

Tính đúng đắn của thuật toán

Định lý

Nếu tất cả các cơ sở không suy biến và bài toán có nghiệm chấp nhận được thì phiên bản cơ sở của thuật toán đơn hình hoạt động đúng, tức là sau hữu hạn bước hoặc sẽ tìm được nghiệm tối ưu hoặc kết luận rằng bài toán không bị chặn.

Chứng minh.

Ta đã thấy tiêu chuẩn dừng cho nghiệm tối ưu là đúng. Trường hợp kết luận không bị chặn cũng dễ thấy. Như vậy chỉ cần phải chứng minh mỗi bước ta đều nhận được 1 BFS và thuật toán dừng sau hữu hạn bước.

Để chứng minh điểm thứ 2 ta sẽ chứng minh giá trị hàm mục tiêu sẽ không giảm, đặc biệt trong trường hợp cơ sở không suy biến thì hàm mục tiêu sẽ tăng.

Tính đúng đắn của thuật toán

Định lý

Nếu tất cả các cơ sở không suy biến và bài toán có nghiệm chấp nhận được thì phiên bản cơ sở của thuật toán đơn hình hoạt động đúng, tức là sau hữu hạn bước hoặc sẽ tìm được nghiệm tối ưu hoặc kết luận rằng bài toán không bị chặn.

Chứng minh.

Ta đã thấy tiêu chuẩn dừng cho nghiệm tối ưu là đúng. Trường hợp kết luận không bị chặn cũng dễ thấy. Như vậy chỉ cần phải chứng minh mỗi bước ta đều nhận được 1 BFS và thuật toán dừng sau hữu hạn bước.

Để chứng minh điểm thứ 2 ta sẽ chứng minh giá trị hàm mục tiêu sẽ không giảm, đặc biệt trong trường hợp cơ sở không suy biến thì hàm mục tiêu sẽ tăng. Do đó các cơ sở tìm được sẽ không lặp lại và do số cơ sở là hữu hạn thuật toán sẽ dừng lại sau hữu hạn bước.

Tính đúng đắn của thuật toán

Để đơn giản ta sẽ thống nhất một số kí hiệu sau.

- ▶ $\{1, 2, \dots, m\}$ kí hiệu các chỉ số dòng của A .
- ▶ Trong mỗi bước của thuật toán các chỉ số cột được chia thành 2 loại, cơ sở $B = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ và ngoài cơ sở $N = \{q_1, q_2, \dots, q_{n-m}\}$. Lưu ý rằng trong bảng đơn hình vị trí (i, p_j) có giá trị δ_{ij} .

Ví dụ về kí hiệu

1	4	0	1	0	0	5	$p_1 = 4$
2	4	-2	0	1	0	6	$p_2 = 5$
①	1	-2	0	0	1	2	$p_3 = 6$
3	2	-4	0	0	0	0	

0	3	2	1	0	-1	3	$p_1 = 4$
0	2	②	0	1	-2	2	$p_2 = 5$
1	1	-2	0	0	1	2	$p_3 = 1$
0	-1	2	0	0	-3	-6	

0	1	0	1	-1	1	1	$p_1 = 4$
0	1	1	0	1/2	-1	1	$p_2 = 3$
1	3	0	0	1	-1	4	$p_3 = 1$
0	-3	0	0	-1	-1	-8	

Tính đúng đắn của thuật toán

Giả sử ta có cơ sở chấp nhận được B với nghiệm x . Bước tiếp theo ta nhận được cơ sở B' với nghiệm x' . B' nhận được từ B với biến chỉ số s thay cho biến p_r . Ta cần chứng minh B' cũng là 1 cơ sở chấp nhận được và $c^T x \leq c^T x'$.

Tính đúng đắn của thuật toán

Giả sử ta có cơ sở chấp nhận được B với nghiệm x . Bước tiếp theo ta nhận được cơ sở B' với nghiệm x' . B' nhận được từ B với biến chỉ số s thay cho biến p_r . Ta cần chứng minh B' cũng là 1 cơ sở chấp nhận được và $c^T x \leq c^T x'$.

Kí hiệu $\bar{A} = A_B^{-1}A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1}b$, $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N$.

Tính đúng đắn của thuật toán

Giả sử ta có cơ sở chấp nhận được B với nghiệm x . Bước tiếp theo ta nhận được cơ sở B' với nghiệm x' . B' nhận được từ B với biến chỉ số s thay cho biến p_r . Ta cần chứng minh B' cũng là 1 cơ sở chấp nhận được và $c^T x \leq c^T x'$.

Kí hiệu $\bar{A} = A_B^{-1} A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

Vì B là 1 cơ sở chấp nhận được nên $\bar{b} \geq 0$.

Tính đúng đắn của thuật toán

Giả sử ta có cơ sở chấp nhận được B với nghiệm x . Bước tiếp theo ta nhận được cơ sở B' với nghiệm x' . B' nhận được từ B với biến chỉ số s thay cho biến p_r . Ta cần chứng minh B' cũng là 1 cơ sở chấp nhận được và $c^T x \leq c^T x'$.

Kí hiệu $\bar{A} = A_B^{-1} A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

Vì B là 1 cơ sở chấp nhận được nên $\bar{b} \geq 0$.

Do cách xây dựng, hiển nhiên $Ax' = b$, ta chỉ cần chứng minh $x' \geq 0$.

Tính đúng đắn của thuật toán

Giả sử ta có cơ sở chấp nhận được B với nghiệm x . Bước tiếp theo ta nhận được cơ sở B' với nghiệm x' . B' nhận được từ B với biến chỉ số s thay cho biến p_r . Ta cần chứng minh B' cũng là 1 cơ sở chấp nhận được và $c^T x \leq c^T x'$.

Kí hiệu $\bar{A} = A_B^{-1} A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

Vì B là 1 cơ sở chấp nhận được nên $\bar{b} \geq 0$.

Do cách xây dựng, hiển nhiên $Ax' = b$, ta chỉ cần chứng minh $x' \geq 0$.

Từ giả thiết r là dòng có tỉ số không âm bé nhất. Ta có

$$x'_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_{rs}} \geq 0$$

Tính đúng đắn của thuật toán

Giả sử ta có cơ sở chấp nhận được B với nghiệm x . Bước tiếp theo ta nhận được cơ sở B' với nghiệm x' . B' nhận được từ B với biến chỉ số s thay cho biến p_r . Ta cần chứng minh B' cũng là 1 cơ sở chấp nhận được và $c^T x \leq c^T x'$.

Kí hiệu $\bar{A} = A_B^{-1} A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

Vì B là 1 cơ sở chấp nhận được nên $\bar{b} \geq 0$.

Do cách xây dựng, hiển nhiên $Ax' = b$, ta chỉ cần chứng minh $x' \geq 0$.

Từ giả thiết r là dòng có tỉ số không âm bé nhất. Ta có

$$x'_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_{rs}} \geq 0$$

$$x'_{p_i} = \bar{b}_i - \bar{A}_{is} \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_{rs}} \geq \begin{cases} \bar{b}_i - \bar{A}_{is} \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{is}} & \text{nếu } i \neq r, \bar{A}_{is} > 0 \\ \bar{b}_i & \text{nếu } i \neq r, \bar{A}_{is} \leq 0 \end{cases} \geq 0$$

Tính đúng đắn của thuật toán

Giả sử ta có cơ sở chấp nhận được B với nghiệm x . Bước tiếp theo ta nhận được cơ sở B' với nghiệm x' . B' nhận được từ B với biến chỉ số s thay cho biến p_r . Ta cần chứng minh B' cũng là 1 cơ sở chấp nhận được và $c^T x \leq c^T x'$.

Kí hiệu $\bar{A} = A_B^{-1} A_N$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.

Vì B là 1 cơ sở chấp nhận được nên $\bar{b} \geq 0$.

Do cách xây dựng, hiển nhiên $Ax' = b$, ta chỉ cần chứng minh $x' \geq 0$.

Từ giả thiết r là dòng có tỉ số không âm bé nhất. Ta có

$$x'_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_{rs}} \geq 0$$

$$x'_{p_i} = \bar{b}_i - \bar{A}_{is} \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_{rs}} \geq \begin{cases} \bar{b}_i - \bar{A}_{is} \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_{rs}} & \text{nếu } i \neq r, \bar{A}_{is} > 0 \\ \bar{b}_i & \text{nếu } i \neq r, \bar{A}_{is} \leq 0 \end{cases} \geq 0$$

và $x'_i = 0$ với các chỉ số còn lại (ngoài cơ sở).

Tính đúng đắn của thuật toán

Theo (1) ta có

$$c^T x' = c^T x + \bar{c}^T x'_N = c^T x + \bar{c}_s x'_s \geq c^T x.$$

Tính đúng đắn của thuật toán

Theo (1) ta có

$$c^T x' = c^T x + \bar{c}^T x'_N = c^T x + \bar{c}_s x'_s \geq c^T x.$$

Nếu cơ sở B' không suy biến thì $x'_s > 0$ và do đó $c^T x' > c^T x$.

Tính đúng đắn của thuật toán

Theo (1) ta có

$$c^T x' = c^T x + \bar{c}^T x'_N = c^T x + \bar{c}_s x'_s \geq c^T x.$$

Nếu cơ sở B' không suy biến thì $x'_s > 0$ và do đó $c^T x' > c^T x$.

Như vậy ta đã chứng minh được tính đúng đắn của thuật toán trong trường hợp tất cả các cơ sở đều không suy biến. Trường hợp tổng quát thì sao?

Các vấn đề có thể gặp phải với thuật toán đơn hình

Khởi tạo: Ta cần 1 BFS để xuất phát. Làm sao có thể tìm nó?

Các vấn đề có thể gặp phải với thuật toán đơn hình

Khởi tạo: Ta cần 1 BFS để xuất phát. Làm sao có thể tìm nó?

Vòng lặp: Ta luôn chọn 1 biến vào cơ sở và một biến rời cơ sở trong mỗi vòng lặp.

Có thể xảy ra trường hợp có nhiều sự lựa chọn hay không có sự lựa chọn nào không?

Các vấn đề có thể gặp phải với thuật toán đơn hình

Khởi tạo: Ta cần 1 BFS để xuất phát. Làm sao có thể tìm nó?

Vòng lặp: Ta luôn chọn 1 biến vào cơ sở và một biến rời cơ sở trong mỗi vòng lặp.

Có thể xảy ra trường hợp có nhiều sự lựa chọn hay không có sự lựa chọn nào không?

Nếu có nhiều sự lựa chọn thì nên làm thế nào?

Các vấn đề có thể gặp phải với thuật toán đơn hình

Khởi tạo: Ta cần 1 BFS để xuất phát. Làm sao có thể tìm nó?

Vòng lặp: Ta luôn chọn 1 biến vào cơ sở và một biến rời cơ sở trong mỗi vòng lặp.

Có thể xảy ra trường hợp có nhiều sự lựa chọn hay không có sự lựa chọn nào không?

Nếu có nhiều sự lựa chọn thì nên làm thế nào?

Kết thúc: Thuật toán có dừng sau hữu hạn bước không?

Các vấn đề có thể gặp phải với thuật toán đơn hình

Khởi tạo: Ta cần 1 BFS để xuất phát. Làm sao có thể tìm nó?

Vòng lặp: Ta luôn chọn 1 biến vào cơ sở và một biến rời cơ sở trong mỗi vòng lặp.

Có thể xảy ra trường hợp có nhiều sự lựa chọn hay không có sự lựa chọn nào không?

Nếu có nhiều sự lựa chọn thì nên làm thế nào?

Kết thúc: Thuật toán có dừng sau hữu hạn bước không?

Nó có dừng khi có nghiệm?

Các vấn đề có thể gặp phải với thuật toán đơn hình

Khởi tạo: Ta cần 1 BFS để xuất phát. Làm sao có thể tìm nó?

Vòng lặp: Ta luôn chọn 1 biến vào cơ sở và một biến rời cơ sở trong mỗi vòng lặp.

Có thể xảy ra trường hợp có nhiều sự lựa chọn hay không có sự lựa chọn nào không?

Nếu có nhiều sự lựa chọn thì nên làm thế nào?

Kết thúc: Thuật toán có dừng sau hữu hạn bước không?

Nó có dừng khi có nghiệm?

Nó có dừng khi vấn đề không bị chặn?

Các vấn đề có thể gặp phải với thuật toán đơn hình

Khởi tạo: Ta cần 1 BFS để xuất phát. Làm sao có thể tìm nó?

Vòng lặp: Ta luôn chọn 1 biến vào cơ sở và một biến rời cơ sở trong mỗi vòng lặp.

Có thể xảy ra trường hợp có nhiều sự lựa chọn hay không có sự lựa chọn nào không?

Nếu có nhiều sự lựa chọn thì nên làm thế nào?

Kết thúc: Thuật toán có dừng sau hữu hạn bước không?

Nó có dừng khi có nghiệm?

Nó có dừng khi vấn đề không bị chặn?

Có thể xảy ra trường hợp thuật toán xoay mãi không dừng?

Choosing the Entering Variable

Assume we are given a feasible dictionary:

$$\begin{aligned}x_{p_i} &= \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B \\ z &= \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j\end{aligned} \tag{D_B}$$

where $\bar{b}_i \geq 0$.

Choosing the Entering Variable

Assume we are given a feasible dictionary:

$$\begin{aligned}x_{p_i} &= \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B \\ z &= \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j\end{aligned} \tag{D_B}$$

where $\bar{b}_i \geq 0$.

Entering Variable:

Choosing the Entering Variable

Assume we are given a feasible dictionary:

$$\begin{aligned}x_{p_i} &= \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B \\ z &= \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j\end{aligned}\tag{D_B}$$

where $\bar{b}_i \geq 0$.

Entering Variable:

A nonbasic variable x_{j_0} , $j_0 \in N$ can enter the basis if $\bar{c}_{j_0} > 0$.

Choosing the Entering Variable

Assume we are given a feasible dictionary:

$$\begin{aligned}x_{p_i} &= \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B \\ z &= \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j\end{aligned} \tag{D_B}$$

where $\bar{b}_i \geq 0$.

Entering Variable:

A nonbasic variable x_{j_0} , $j_0 \in N$ can enter the basis if $\bar{c}_{j_0} > 0$.

There may be many such nonbasic variables, but all of them have the potential to increase the value of the objective variable z .

Choosing the Leaving Variable

$$x_{p_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B$$

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

Choosing the Leaving Variable

$$x_{p_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B$$

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

Suppose $x_{j_0}, j_0 \in N$ is the entering variable.

The leaving variable is that basic variable whose non-negativity places the greatest restriction on increasing the value of the entering variable x_{j_0} .

The leaving variable attains the minimum value among the ratios

$$\frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ij_0}} \quad \text{for } \bar{A}_{ij_0} > 0 \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

If $x_{p_{i_0}}$ is the leaving variable, then

$$\frac{\bar{b}_{i_0}}{\bar{A}_{i_0 j_0}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ij_0}} : i \in \{1, \dots, m\}, \bar{A}_{ij_0} > 0 \right\}.$$

Hazards in Choosing the Leaving Variable

$$x_{p_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B$$

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

Two potential problems:

- (i) There is no $i \in \{1, \dots, m\}$ for which $\bar{A}_{ij_0} > 0$.
- (ii) There is more than one $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ for which

$$\frac{\bar{b}_{i_0}}{\bar{A}_{i_0 j_0}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ij_0}} : i \in \{1, \dots, m\}, \bar{A}_{ij_0} > 0 \right\}.$$

If (i) occurs, then we can increase the value of the entering variable x_{j_0} , as much as we want without violating feasibility.

That is, we can increase the value of z as much as we want.

Hence the LP is unbounded.

Fact: If there exists $j_0 \in N$ in the dictionary D_B for which $\bar{c}_{j_0} > 0$ and $\bar{A}_{ij_0} \leq 0$ for all $i \in \{1, \dots, m\}$, then the LP

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

is unbounded, i.e., the optimal value is $+\infty$.

Unbounded LPs

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Unbounded LPs

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Hazards in Choosing the Leaving Variable

$$x_{p_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B$$

$$z = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

Two potential problems:

- (i) There is no $i \in \{1, \dots, m\}$ for which $\bar{A}_{ij_0} > 0$.
- (ii) There is more than one $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ for which

$$\frac{\bar{b}_{i_0}}{\bar{A}_{i_0 j_0}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ij_0}} : i \in \{1, \dots, m\}, \bar{A}_{ij_0} > 0 \right\}.$$

(ii) is **VERY BAD** for the simplex algorithm!

We show why by example.

Example

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 - x_2 + 8x_3 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \leq 3 \\ & -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2 \\ & 2x_3 \leq 1 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$z = 0$$

2	-4	6	1	0	0	3
-1	3	4	0	1	0	2
0	0	2	0	0	1	1
2	-1	8	0	0	0	0

Note that any one of these rows could serve as the pivot row!

Example

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$z = 4$$

2	-4	6	1	0	0	3
-1	3	4	0	1	0	2
0	0	②	0	0	1	1
2	-1	8	0	0	0	0
②	-4	0	1	0	-3	0
-1	3	0	0	1	-2	0
0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	-1	0	0	0	-4	-4

Note that any one of these rows could serve as the pivot row!

Note that by pivoting on this tableau we do not change the objective value

Example

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $z = 4$	②	-4	0	1	0	-3	0	Note that by pivoting on this tableau we do not change the objective value
	-1	3	0	0	1	-2	0	
	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	2	-1	0	0	0	-4	-4	
$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $z = 4$	1	-2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	0	Note that we have not changed the point identified by this tableau
	0	①	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-7}{2}$	0	
	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	0	3	0	-1	0	-1	-4	

Example

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	1	-2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	Note that we have not changed the point identified by this tableau
	0	①	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	0	
	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$z = 4$	0	3	0	-1	0	-1	-4	
$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	1	0	0	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{17}{2}$	0	Again no change.
	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	0	
	0	0	1	0	0	① $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$z = 4$	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	-3	$\frac{19}{2}$	-4	

Example

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$z = 4$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = \frac{27}{2}$$

1	0	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{-17}{2}$	0
0	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-7}{2}$	0
0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	$\frac{-5}{2}$	-3	$\frac{19}{2}$	-4
1	0	17	$\frac{3}{2}$	2	0	$\frac{17}{2}$
0	1	7	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{7}{2}$
0	0	2	0	0	1	1
0	0	-19	$\frac{-5}{2}$	-3	0	$\frac{-27}{2}$

Again no change.

Finally, we break out to optimality.

Degeneracy (suy biến)

1. If on a given pivot, there is more than one choice of variable to leave the basis, then the subsequent tableau will set one or more of the basic variables equal to zero in the associated basic feasible solution.

A dictionary in which one or more of the basic variables is set to zero in the associated basic feasible solution is called a “degenerate dictionary”.

Correspondingly, a tableau in which one or more of the basic variables is set to zero in the associated basic feasible solution is called a “degenerate tableau”.

2. It is possible that a pivot on a degenerate dictionary (or tableau) does not change the associated basic feasible solution and the value of the objective variable z .

Such a pivot is called a “degenerate pivot”.

Observation (2) is particularly troublesome since it opens the door to the possibility of an infinite sequence of degenerate pivots never terminating with optimality.

Unfortunately, this *can occur* leading to the failure of the method.

Our goal is to understand how such a pathological situation can occur and then to devise methods to overcome the problem.

Pivoting rule

Assume the algorithm is operating with iron clad pivoting rules.
That is, a non-optimal feasible dictionary has a unique pivot.

$$\begin{aligned}x_{p_i} &= \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad p_i \in B \\ z &= \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j\end{aligned} \tag{D_B}$$

Largest-Coefficient Smallest (Largest)-Subscript Rule

- ▶ Choice of Entering Variable: Among all those variables x_j with $j \in N$ such that $\bar{c}_j = \max\{\bar{c}_k : k \in N\} > 0$ choose x_{j_0} so that j_0 is largest.
- ▶ Choice of Leaving Variable: Among all those basic variables x_{p_i} with $i \in \{1, \dots, m\}$ such that

$$\frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ij_0}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_k}{\bar{A}_{kj_0}} : k \in \{1, \dots, m\}, \bar{A}_{kj_0} > 0 \right\}$$

choose $x_{p_{i_0}}$ so that p_{i_0} is smallest (largest, respectively).

How Many Possible Bases?

How many possible ways are there to choose a set of basic indices?

Since every basis must contain m variables and there are only $n + m$ variables altogether, the total number of possible sets of basic indices equals the number of possible ways to choose m distinct elements from a collection of $n + m$ objects.

$$\binom{n + m}{m} = \frac{(n + m)!}{m!n!}.$$

infinite pivot sequence \Rightarrow infinite dictionary sequence.

At least one dictionary, say D_1 , has a basis B appearing twice.

Suppose B is also the basis for D_{N+1} .

Let

$$\dots D_1, \dots, D_N, D_{N+1}, D_{N+2}, D_{N+3}, \dots$$

be the sequence of pivots where D_1 and D_{N+1} have the same basis.

If each basis is associated with a unique dictionary, then

$D_1 = D_{N+1}$. But then,

$$D_2 = D_{N+2}, D_3 = D_{N+3}, \dots, D_1 = D_{2N}, D_2 = D_{2N+2}, \dots$$

That is, the same sequence of dictionaries appear over and over again. If this occurs we say that the sequence of dictionaries cycles.

Cycling - example

$\frac{16}{5}$	-84	-12	8	1	0	0	0
$\frac{1}{5}$	-5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{4}{5}$	-18	-1	-1	0	0	0	0

Cycling - example

$\frac{16}{5}$	-84	-12	8	1	0	0	0
$\frac{1}{5}$	-5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{4}{5}$	-18	-1	-1	0	0	0	0
1	$-\frac{105}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{16}$	0	0	0
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{16}$	1	0	0
0	$\frac{105}{4}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{16}$	0	1	1
0	3	2	-3	$-\frac{1}{4}$	0	0	0

Cycling - example

$\frac{16}{5}$	-84	-12	8	1	0	0	0
$\frac{1}{5}$	-5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{4}{5}$	-18	-1	-1	0	0	0	0

1	$-\frac{105}{4}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{16}$	0	0	0
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{16}$	1	0	0
0	$\frac{105}{4}$	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{16}$	0	1	1
0	3	2	-3	$-\frac{1}{4}$	0	0	0

Cycling - example

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 \textcircled{\frac{16}{5}} & -84 & -12 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{5} & -5 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 \frac{4}{5} & -18 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 1 & -\frac{105}{4} & -\frac{15}{4} & \frac{5}{2} & \frac{5}{16} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \textcircled{\frac{1}{4}} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{16} & 1 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{105}{4} & \frac{15}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{16} & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 0 & 3 & 2 & -3 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 1 & 0 & 5 & -15 & -\frac{25}{4} & 105 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -5 & 15 & \frac{25}{4} & -105 & 1 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -12 & 0 & 0
 \end{array}$$

Cycling - example

1	0	⑤	-15	$-\frac{25}{4}$	105	0	0
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	4	0	0
0	0	-5	15	$\frac{25}{4}$	-105	1	1
0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	-12	0	0

Cycling - example

1	0	⑤	-15	$-\frac{25}{4}$	105	0	0
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	4	0	0
0	0	-5	15	$\frac{25}{4}$	-105	1	1
0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	-12	0	0

$\frac{1}{5}$	0	1	-3	$-\frac{5}{4}$	21	0	0
$-\frac{1}{15}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	-3	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$-\frac{1}{5}$	0	0	2	$\frac{7}{4}$	-33	0	0

Cycling - example

1	0	⑤	-15	$-\frac{25}{4}$	105	0	0
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	4	0	0
0	0	-5	15	$\frac{25}{4}$	-105	1	1
0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	-12	0	0

$\frac{1}{5}$	0	1	-3	$-\frac{5}{4}$	21	0	0
$-\frac{1}{15}$	1	0	① $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	-3	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$-\frac{1}{5}$	0	0	2	$\frac{7}{4}$	-33	0	0

Cycling - example

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 1 & 0 & \textcircled{5} & -15 & -\frac{25}{4} & 105 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -5 & 15 & \frac{25}{4} & -105 & 1 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -12 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 \frac{1}{5} & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{4} & 21 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{15} & 1 & 0 & \textcircled{\frac{1}{3}} & \frac{1}{6} & -3 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 2 & \frac{7}{4} & -33 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 -\frac{2}{5} & 9 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -6 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{5} & 3 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -9 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 \frac{1}{5} & -6 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -15 & 0 & 0
 \end{array}$$

Cycling - example

$-\frac{2}{5}$	9	1	0	$\frac{1}{4}$	-6	0	0
$-\frac{1}{5}$	3	0	1	$\frac{1}{2}$	-9	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{5}$	-6	0	0	$\frac{3}{4}$	-15	0	0

Cycling - example

$-\frac{2}{5}$	9	1	0	$\frac{1}{4}$	-6	0	0
$-\frac{1}{5}$	3	0	1	$\frac{1}{2}$	-9	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{5}$	-6	0	0	$\frac{3}{4}$	-15	0	0

$-\frac{8}{5}$	36	4	0	1	-24	0	0
$\frac{3}{5}$	-15	-2	1	0	3	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{7}{5}$	-33	-3	0	0	3	0	0

Cycling - example

$-\frac{2}{5}$	9	1	0	$\frac{1}{4}$	-6	0	0
$-\frac{1}{5}$	3	0	1	$\frac{1}{2}$	-9	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{5}$	-6	0	0	$\frac{3}{4}$	-15	0	0

$-\frac{8}{5}$	36	4	0	1	-24	0	0
$\frac{3}{5}$	-15	-2	1	0	3	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{7}{5}$	-33	-3	0	0	3	0	0

Cycling - example

$$\begin{array}{cccc|cc} -\frac{2}{5} & 9 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -6 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 3 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \frac{1}{5} & -6 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -15 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} -\frac{8}{5} & 36 & 4 & 0 & 1 & -24 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -15 & -2 & 1 & 0 & \textcircled{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \frac{7}{5} & -33 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} \frac{16}{5} & -84 & -12 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -5 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \frac{4}{5} & -18 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Fact:

The simplex algorithm fails to terminate if and only if it cycles.

The simplex algorithms can only cycle between degenerate dictionaries (or tableaus) with each dictionary (or tableau) in the cycle being associated with the same basic feasible solution and objective value.

Degeneracy and Cycling

We have established that the simplex algorithm can only fail to terminate if it cycles, and that it can only cycle in the presence of degeneracy. In order to assure that the simplex algorithm successfully terminates we need to develop a pivoting rule that avoids cycling.

There are many anti-cycling pivoting rules. We present the smallest subscript rule, also known as Bland's Rule.

Bland's Rule

$$\begin{aligned}x_i &= \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{A}_{ij} x_j \quad i \in B \\z &= \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j\end{aligned} \tag{D_B}$$

Choice of entering variable: x_{j_0} for $j_0 \in N$ is the entering variable if $\bar{c}_{j_0} > 0$ and $j_0 \leq j$ whenever $\bar{c}_j > 0$.

Choice of leaving variable: $x_{p_{i_0}}$ for $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ ($x_{p_{i_0}} \in B$) is the leaving variable if

$$\frac{\bar{b}_{i_0}}{\bar{A}_{i_0 j_0}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{i j_0}} : i \in \{1, \dots, m\}, \bar{A}_{i j_0} > 0 \right\}$$

and

$$p_{i_0} \leq p_i \text{ whenever } \frac{\bar{b}_{i_0}}{\bar{A}_{i_0 j_0}} = \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{i j_0}} \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Theorem (R.G. Bland (1977))

The simplex algorithm terminates as long as the choice of variable to enter or leave the basis is made according to the smallest subscript rule.

We abbreviate the *Bland's rule* to **SSR** (smallest subscript rule).

Initialization

We have shown that if we are given a feasible dictionary (tableau) for an LP, then the simplex algorithm will terminate finitely if it is employed with a anti-cycling rule.

The anti-cycling rule need only be applied on degenerate pivots, since cycling can only occur in the presence of degeneracy.

The simplex algorithm will terminate in one of two ways:

- ▶ The LP is determined to be unbounded.
- ▶ An optimal BFS is found.

We now address the question of how to determine an initial feasible dictionary (tableau).

The Auxiliary Problem

We want to solve the following LP (LP dạng chuẩn tắc)

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \max \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$b \not\geq 0$, i.e., b has negative components. The case $b \geq 0$ is easy.

The Auxiliary Problem

We want to solve the following LP (LP dạng chuẩn tắc)

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \max \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$b \not\geq 0$, i.e., b has negative components. The case $b \geq 0$ is easy.

Consider an auxiliary LP of the form

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}) \quad & \min \quad x_0 \\ & \text{s.t.} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

where $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$ is the vector of all ones.

The Auxiliary Problem

We want to solve the following LP (LP dạng chuẩn tắc)

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \quad & \max \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$b \not\geq 0$, i.e., b has negative components. The case $b \geq 0$ is easy.

Consider an auxiliary LP of the form

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}) \quad & \min \quad x_0 \\ & \text{s.t.} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

where $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$ is the vector of all ones.

The i^{th} row of the system of inequalities $Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b$ is

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_0 \leq b_i.$$

In block matrix form we write

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \leq b.$$

The Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (Q) \quad & \min \quad x_0 \\ & \text{s.t.} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

We will show that we can easily construct a BFS of (Q) , i.e., it is feasible.

The Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (Q) \quad & \min x_0 \\ & \text{s.t. } Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

We will show that we can easily construct a BFS of (Q) , i.e., it is feasible. (Q) is bounded below by 0.

The Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (Q) \quad & \min \quad x_0 \\ & \text{s.t.} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

We will show that we can easily construct a BFS of (Q) , i.e., it is feasible. (Q) is bounded below by 0. Hence it has optimal solutions.

The Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}) \quad & \min \quad x_0 \\ & \text{s.t.} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

We will show that we can easily construct a BFS of (\mathcal{Q}) , i.e., it is feasible. (\mathcal{Q}) is bounded below by 0. Hence it has optimal solutions.

If the optimal value in the auxiliary problem is 0, then at the optimal solution \tilde{x}_0, \tilde{x} we have $\tilde{x}_0 = 0$.

The Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}) \quad & \min \quad x_0 \\ & \text{s.t.} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

We will show that we can easily construct a BFS of (\mathcal{Q}) , i.e., it is feasible. (\mathcal{Q}) is bounded below by 0. Hence it has optimal solutions.

If the optimal value in the auxiliary problem is 0, then at the optimal solution \tilde{x}_0, \tilde{x} we have $\tilde{x}_0 = 0$.

Plugging into $Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b$, we get $A\tilde{x} \leq b$, i.e. \tilde{x} is feasible for (\mathcal{P}) .

The Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}) \quad & \min \quad x_0 \\ & \text{s.t.} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad x_0, x \geq 0. \end{aligned}$$

We will show that we can easily construct a BFS of (\mathcal{Q}) , i.e., it is feasible. (\mathcal{Q}) is bounded below by 0. Hence it has optimal solutions.

If the optimal value in the auxiliary problem is 0, then at the optimal solution \tilde{x}_0, \tilde{x} we have $\tilde{x}_0 = 0$.

Plugging into $Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b$, we get $A\tilde{x} \leq b$, i.e. \tilde{x} is feasible for (\mathcal{P}) .

On the other hand, if \hat{x} is feasible for (\mathcal{P}) , then (\hat{x}_0, \hat{x}) with $\hat{x}_0 = 0$ is feasible for (\mathcal{Q}) , so (\hat{x}_0, \hat{x}) is optimal for (\mathcal{Q}) .

The Auxiliary Problem

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}) \quad & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && Ax \leq b \\ & && x \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{Q}) \quad & \text{minimize} && x_0 \\ & \text{subject to} && Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \\ & && x_0, x \geq 0.\end{aligned}$$

- ▶ (\mathcal{P}) is feasible \Leftrightarrow the optimal value in (\mathcal{Q}) is zero.
- ▶ (\mathcal{P}) is infeasible \Leftrightarrow the optimal value in (\mathcal{Q}) is positive.

Two Phase Simplex Algorithm

The auxiliary problem (Q) is also called the *Phase I* problem since solving it is the first phase of a two phase process of solving general LPs.

In Phase I we solve the auxiliary problem to obtain an initial feasible tableau for (\mathcal{P}), and in Phase II we solve the original LP starting with the feasible tableau provided in Phase I.

Initializing the Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (Q) \quad & \text{minimize} \quad x_0 \\ & \text{subject to} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad 0 \leq x_0, x. \end{aligned}$$

Problem: Since $b \not\geq 0$, the initial dictionary for (Q) is infeasible!

Solution: Set $x_0 = -\min\{b_1, \dots, b_m\} > 0$, then $b + x_0 \mathbf{1} \geq 0$ since
$$\min\{b_i + x_0 : i = 1, \dots, m\} = \min\{b_i : i = 1, \dots, m\} + x_0 = 0.$$

Hence, $x_0 = -\min\{b_1, \dots, b_m\}$ and $x = 0$ is feasible for (Q) .

It also a BFS for (Q) .

Initializing the Auxiliary Problem

$$\begin{aligned} (Q) \quad & \text{minimize} \quad x_0 \\ & \text{subject to} \quad Ax - x_0 \mathbf{1} \leq b, \quad 0 \leq x_0, x. \end{aligned}$$

The initial dictionary for (Q) is

$$x_{n+i} = b_i + x_0 - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m$$

$$z = -x_0.$$

With $b \not\geq 0$, the initial dictionary is infeasible and we need to bring x_0 into the basis.

Initializing the Auxiliary Problem

With $b \not\geq 0$, let i_0 be the index of the smallest b_i , i.e.,

$$b_{i_0} = \min\{b_i : i = 1, \dots, m\} < 0.$$

Pivot on this row bringing x_0 into the basis yielding

$$x_0 = -b_{i_0} + x_{n+i_0} + \sum_{j=1}^n a_{i_0j} x_j$$

$$x_{n+i} = b_i - b_{i_0} + x_{n+i_0} - \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{i_0j}) x_j, \quad i \neq i_0$$

$$z = b_{i_0} - x_{n+i_0} - \sum_{j=1}^n a_{i_0j} x_j.$$

This dictionary is feasible for (Q) .

Initializing the Auxiliary Problem: Example

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\ & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\ & 0 & \leq & x_1, x_2, x_3 & . \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \max & -x_0 \\ \text{s.t.} & -x_0 & + & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\ & -x_0 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\ & -x_0 & - & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\ & 0 & \leq & x_1, x_2, x_3. \end{array}$$

Example

$$\begin{array}{ll} \max & -x_0 \\ \text{s.t.} & -x_0 + 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & -x_0 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5 \\ & -x_0 - x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

First Pivot

Bảng đơn hình chứa cả hàm mục tiêu của bài toán gốc.

	x_0							
	-1	2	-1	2	1	0	0	4
	-1	2	-3	1	0	1	0	-5
	-1	-1	1	-2	0	0	1	-1
z	0	1	-1	1	0	0	0	0
w	-1	0	0	0	0	0	0	0

First Pivot

Bảng đơn hình chứa cả hàm mục tiêu của bài toán gốc.

	x_0								
	-1	2	-1	2	1	0	0	4	
	-1	2	-3	1	0	1	0	-5	most negative
	-1	-1	1	-2	0	0	1	-1	
z	0	1	-1	1	0	0	0	0	
w	-1	0	0	0	0	0	0	0	

First Pivot

Bảng đơn hình chứa cả hàm mục tiêu của bài toán gốc.

	x_0								
	-1	2	-1	2	1	0	0	4	
	(-1)	2	-3	1	0	1	0	-5	most negative
	-1	-1	1	-2	0	0	1	-1	
z	0	1	-1	1	0	0	0	0	
w	-1	0	0	0	0	0	0	0	

$$1 \quad -2 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad | \quad 5$$

First Pivot

Bảng đơn hình chứa cả hàm mục tiêu của bài toán gốc.

	x_0								
	-1	2	-1	2	1	0	0	4	
	(-1)	2	-3	1	0	1	0	-5	most negative
	-1	-1	1	-2	0	0	1	-1	
z	0	1	-1	1	0	0	0	0	
w	-1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	2	1	1	-1	0	9	
	1	-2	3	-1	0	-1	0	5	
	0	-3	4	-3	0	-1	1	4	
z	0	1	-1	1	0	0	0	0	
w	0	-2	3	-1	0	-1	0	5	

First Pivot

Bảng đơn hình chứa cả hàm mục tiêu của bài toán gốc.

	x_0								
	-1	2	-1	2	1	0	0	4	
	(-1)	2	-3	1	0	1	0	-5	most negative
	-1	-1	1	-2	0	0	1	-1	
z	0	1	-1	1	0	0	0	0	
w	-1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	2	1	1	-1	0	9	
	1	-2	3	-1	0	-1	0	5	
	0	-3	(4)	-3	0	-1	1	4	
z	0	1	-1	1	0	0	0	0	
w	0	-2	3	-1	0	-1	0	5	

Second Pivot

	0	0	2	1	1	-1	0		9
	1	-2	3	-1	0	-1	0		5
	0	-3	④	-3	0	-1	1		4
<i>z</i>	0	1	-1	1	0	0	0		0
<i>w</i>	0	-2	3	-1	0	-1	0		5

Second Pivot

	0	0	2	1	1	-1	0		9
	1	-2	3	-1	0	-1	0		5
	0	-3	④	-3	0	-1	1		4
z	0	1	-1	1	0	0	0		0
w	0	-2	3	-1	0	-1	0		5

	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		7
	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$		2
	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		1
z	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		1
w	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$		2

Second Pivot

	0	0	2	1	1	-1	0	9
	1	-2	3	-1	0	-1	0	5
	0	-3	④	-3	0	-1	1	4
z	0	1	-1	1	0	0	0	0
w	0	-2	3	-1	0	-1	0	5

	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
	1	$\frac{1}{4}$	0	⑤ $\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	2
	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
z	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
w	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	2

Third Pivot

	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	2
	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
<i>z</i>	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
<i>w</i>	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	2

Third Pivot

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 \\
 z \\
 w
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc|c}
 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 7 \\
 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 2 \\
 0 & -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\
 \hline
 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\
 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 z \\
 w
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc|c}
 -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
 \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\
 \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\
 \hline
 -\frac{1}{5} & \frac{4}{20} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{20} & \frac{8}{20} & \frac{3}{5} \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Third Pivot

	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	2
	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
z	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
w	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	2

	-2	1	0	0	1	0	1	3
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$
	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$
z	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	0	0	0	$-\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{5}$
w	-1	0	0	0	0	0	0	0

Auxiliary
problem
solved.

Auxiliary Problem Solution

	-2	1	0	0	1	0	1	3	
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$	
	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$	
z	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	0	0	0	$-\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{5}$	Original LP
w	-1	0	0	0	0	0	0	0	is feasible

Auxiliary Problem Solution

	-2	1	0	0	1	0	1	3	Extract initial. feasible tableau.
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$	
	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$	
<i>z</i>	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	0	0	0	$-\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{5}$	
<i>w</i>	-1	0	0	0	0	0	0	0	

Auxiliary Problem Solution

	-2	1	0	0	1	0	1	3	Extract initial. feasible tableau.
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$	
	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$	
z	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	0	0	0	$-\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{5}$	
w	-1	0	0	0	0	0	0	0	

	-2	1	0	0	1	0	1	3
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$
	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$
z	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{20}$	0	0	0	$-\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{5}$
w	-1	0	0	0	0	0	0	0

Phase II

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \textcircled{1} & 3 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ \hline \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Phase II

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \textcircled{1} & 3 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ \hline \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{5} \\ \hline -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}$$

Phase II: Solution

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{5} \\ \hline -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}$$

Phase II: Solution

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{5} \\ \hline -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}$$

Optimal solutions is

Phase II: Solution

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{5} \\ \hline -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}$$

Optimal solutions is

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.8 \\ 3.4 \end{pmatrix}$$

Phase II: Solution

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{14}{5} \\ \hline -\frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}$$

Optimal solutions is

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.8 \\ 3.4 \end{pmatrix}$$

with optimal value $z = 0.6$.

Example: Two Phase Simplex Algorithm

Use the two phase simplex method to solve the following LP:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 3x_1 & + & x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ &&& -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ &&& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ &&& 0 \leq & x_1, x_2 \end{aligned}$$

Hint: A complete solution is possible in 3 pivots.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Nếu ta muốn giải LP dạng

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

thì sao?

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Nếu ta muốn giải LP dạng

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

thì sao? Cách thứ nhất là viết bài toán lại dưới dạng sau rồi giải như trên

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Nếu ta muốn giải LP dạng

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

thì sao? Cách thứ nhất là viết bài toán lại dưới dạng sau rồi giải như trên

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Tuy nhiên cách này chúng ta tăng gấp đôi số điều kiện và biến bù.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Nếu ta muốn giải LP dạng

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

thì sao? Cách thứ nhất là viết bài toán lại dưới dạng sau rồi giải như trên

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Tuy nhiên cách này chúng ta tăng gấp đôi số điều kiện và biến bù.

Cách khác là chúng ta xây dựng một bài toán phụ trực tiếp cho LP dạng chính tắc để tìm BFS xuất phát.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Không mất tính tổng quát giả sử $b \geq 0$.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Không mất tính tổng quát giả sử $b \geq 0$. Nếu không ta nhân các dòng có hệ số âm với -1 .

Ta xét LP phụ trợ

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}^T Ax \\ \text{s.t.} \quad & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

$x = 0$ và $y = b$ là BFS của LP này.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Không mất tính tổng quát giả sử $b \geq 0$. Nếu không ta nhân các dòng có hệ số âm với -1 .

Ta xét LP phụ trợ

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}^T Ax \\ \text{s.t.} \quad & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

$x = 0$ và $y = b$ là BFS của LP này.

Dễ thấy rằng bài toán gốc có nghiệm chấp nhận được khi và chỉ khi bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Không mất tính tổng quát giả sử $b \geq 0$. Nếu không ta nhân các dòng có hệ số âm với -1 .

Ta xét LP phụ trợ

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}^T Ax \\ \text{s.t.} \quad & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

$x = 0$ và $y = b$ là BFS của LP này.

Dễ thấy rằng bài toán gốc có nghiệm chấp nhận được khi và chỉ khi bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$.

Lý do: Với $Ax + y = b$ và $y \geq 0$ thì

$$\mathbf{1}^T Ax = \mathbf{1}^T b - \mathbf{1}^T y \leq \mathbf{1}^T b.$$

Bài toán phụ trợ có nghiệm CND và bị chặn nên có nghiệm tối ưu.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Trong trường hợp bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Trong trường hợp bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$. Ta vẫn còn cần tìm một cơ sở xuất phát.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Trong trường hợp bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$. Ta vẫn còn cần tìm một cơ sở xuất phát.

Bài toán phụ kết thúc với một cơ sở B .

- ▶ TH1: Nếu cơ sở này không chứa biến thêm vào thì đó cũng chính là một cơ sở cho bài toán gốc.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Trong trường hợp bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$. Ta vẫn còn cần tìm một cơ sở xuất phát.

Bài toán phụ kết thúc với một cơ sở B .

- ▶ TH1: Nếu cơ sở này không chứa biến thêm vào thì đó cũng chính là một cơ sở cho bài toán gốc.
- ▶ TH2: Ngược lại, có một số biến y nằm trong cơ sở. Đây chính là trường hợp cơ sở suy biến.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Trong trường hợp bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$. Ta vẫn còn cần tìm một cơ sở xuất phát.

Bài toán phụ kết thúc với một cơ sở B .

- ▶ TH1: Nếu cơ sở này không chứa biến thêm vào thì đó cũng chính là một cơ sở cho bài toán gốc.
- ▶ TH2: Ngược lại, có một số biến y nằm trong cơ sở. Đây chính là trường hợp cơ sở suy biến.

Khởi tạo cho LP dạng chính tắc

Trong trường hợp bài toán phụ trợ có giá trị tối ưu bằng $\mathbf{1}^T b$ và nghiệm tối ưu thỏa mãn $y = 0$. Ta vẫn còn cần tìm một cơ sở xuất phát.

Bài toán phụ kết thúc với một cơ sở B .

- ▶ TH1: Nếu cơ sở này không chứa biến thêm vào thì đó cũng chính là một cơ sở cho bài toán gốc.
- ▶ TH2: Ngược lại, có một số biến y nằm trong cơ sở. Đây chính là trường hợp cơ sở suy biến.

Với trường hợp 2, ta phải đẩy các biến nhân tạo ra khỏi cơ sở.

Đẩy các biến nhân tạo ra khỏi cơ sở

Giả sử có biến cơ sở là biến thêm vào. Xét một biến như vậy. Gọi l là chỉ số hàng ứng với biến cơ sở này (hàng có số 1 trong cột đơn vị ứng với biến). Xét hệ số dòng thứ l trong bảng đơn hình ứng với các biến gốc x (bỏ qua hệ số của biến y).

Đẩy các biến nhân tạo ra khỏi cơ sở

Giả sử có biến cơ sở là biến thêm vào. Xét một biến như vậy. Gọi l là chỉ số hàng ứng với biến cơ sở này (hàng có số 1 trong cột đơn vị ứng với biến). Xét hệ số dòng thứ l trong bảng đơn hình ứng với các biến gốc x (bỏ qua hệ số của biến y).

Có 2 trường hợp

- ▶ TH1 - Các hệ số bằng 0: điều kiện thứ l (trong $Ax = b$) phụ thuộc tuyến tính vào các điều kiện khác và ta có thể bỏ nó đi.

Đẩy các biến nhân tạo ra khỏi cơ sở

Giả sử có biến cơ sở là biến thêm vào. Xét một biến như vậy. Gọi l là chỉ số hàng ứng với biến cơ sở này (hàng có số 1 trong cột đơn vị ứng với biến). Xét hệ số dòng thứ l trong bảng đơn hình ứng với các biến gốc x (bỏ qua hệ số của biến y).

Có 2 trường hợp

- ▶ TH1 - Các hệ số bằng 0: điều kiện thứ l (trong $Ax = b$) phụ thuộc tuyến tính vào các điều kiện khác và ta có thể bỏ nó đi.
- ▶ TH2 - Có hệ số khác 0: đó là hệ số của một biến x_j hiện tại ngoài cơ sở. Ta sẽ thực hiện phép xoay đưa x_j vào cơ sở thay cho biến cơ sở đang xét (là biến thêm vào).

Đẩy các biến nhân tạo ra khỏi cơ sở

Giả sử có biến cơ sở là biến thêm vào. Xét một biến như vậy. Gọi l là chỉ số hàng ứng với biến cơ sở này (hàng có số 1 trong cột đơn vị ứng với biến). Xét hệ số dòng thứ l trong bảng đơn hình ứng với các biến gốc x (bỏ qua hệ số của biến y).

Có 2 trường hợp

- ▶ TH1 - Các hệ số bằng 0: điều kiện thứ l (trong $Ax = b$) phụ thuộc tuyến tính vào các điều kiện khác và ta có thể bỏ nó đi.
- ▶ TH2 - Có hệ số khác 0: đó là hệ số của một biến x_j hiện tại ngoài cơ sở. Ta sẽ thực hiện phép xoay đưa x_j vào cơ sở thay cho biến cơ sở đang xét (là biến thêm vào).

Đẩy các biến nhân tạo ra khỏi cơ sở

Giả sử có biến cơ sở là biến thêm vào. Xét một biến như vậy. Gọi l là chỉ số hàng ứng với biến cơ sở này (hàng có số 1 trong cột đơn vị ứng với biến). Xét hệ số dòng thứ l trong bảng đơn hình ứng với các biến gốc x (bỏ qua hệ số của biến y).

Có 2 trường hợp

- ▶ TH1 - Các hệ số bằng 0: điều kiện thứ l (trong $Ax = b$) phụ thuộc tuyến tính vào các điều kiện khác và ta có thể bỏ nó đi.
- ▶ TH2 - Có hệ số khác 0: đó là hệ số của một biến x_j hiện tại ngoài cơ sở. Ta sẽ thực hiện phép xoay đưa x_j vào cơ sở thay cho biến cơ sở đang xét (là biến thêm vào).

Theo quy trình trên mỗi bước hoặc ta có thể đẩy một biến nhân tạo ra ngoài cơ sở thay bằng một biến gốc, hoặc ta có thể bỏ đi được một điều kiện phụ thuộc tuyến tính.

Đẩy các biến nhân tạo ra khỏi cơ sở

Giả sử có biến cơ sở là biến thêm vào. Xét một biến như vậy. Gọi l là chỉ số hàng ứng với biến cơ sở này (hàng có số 1 trong cột đơn vị ứng với biến). Xét hệ số dòng thứ l trong bảng đơn hình ứng với các biến gốc x (bỏ qua hệ số của biến y).

Có 2 trường hợp

- ▶ TH1 - Các hệ số bằng 0: điều kiện thứ l (trong $Ax = b$) phụ thuộc tuyến tính vào các điều kiện khác và ta có thể bỏ nó đi.
- ▶ TH2 - Có hệ số khác 0: đó là hệ số của một biến x_j hiện tại ngoài cơ sở. Ta sẽ thực hiện phép xoay đưa x_j vào cơ sở thay cho biến cơ sở đang xét (là biến thêm vào).

Theo quy trình trên mỗi bước hoặc ta có thể đẩy một biến nhân tạo ra ngoài cơ sở thay bằng một biến gốc, hoặc ta có thể bỏ đi được một điều kiện phụ thuộc tuyến tính.

Tính đúng đắn: Xem trang 112-113 sách của Bertsimas.

Ví dụ

$$\begin{array}{rcllcll} \min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & x_1 & - & 2x_2 & - & 6x_3 & = & -2 \\ & & & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 5 \\ & & & & & 3x_3 & + & x_4 = 1 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Ví dụ

Để tìm BFS xuất phát ta xét bài toán phụ

$$\begin{array}{rcll} \max & & 8x_2 + 21x_3 + x_4 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & + x_5 = 3 \\ & -x_1 + 2x_2 + 6x_3 & & + x_6 = 2 \\ & & 4x_2 + 9x_3 & + x_7 = 5 \\ & & & 3x_3 + x_4 + x_8 = 1 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{array}$$

Ví dụ

Để tìm BFS xuất phát ta xét bài toán phụ

$$\begin{array}{rcll} \max & & 8x_2 + 21x_3 + x_4 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & + x_5 = 3 \\ & -x_1 + 2x_2 + 6x_3 & & + x_6 = 2 \\ & & 4x_2 + 9x_3 & + x_7 = 5 \\ & & & 3x_3 + x_4 + x_8 = 1 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{array}$$

Bảng đơn hình

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	3	1	0	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
w	0	8	21	1	0	0	0	0	0

Ví dụ

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	3	1	0	0	0	1	1
<i>z</i>	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
<i>w</i>	0	8	21	1	0	0	0	0	0

Ví dụ

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	3	①	0	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
w	0	8	21	1	0	0	0	0	0

Ví dụ

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	3	①	0	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
w	0	8	21	1	0	0	0	0	0

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	3	1	0	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
w	0	8	18	0	0	0	0	-1	-1

Ví dụ

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	3	1	0	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
w	0	8	18	0	0	0	0	-1	-1

Ví dụ

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	③	1	0	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
w	0	8	18	0	0	0	0	-1	-1

Ví dụ

	1	2	3	0	1	0	0	0	3
	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
	0	4	9	0	0	0	1	0	5
	0	0	③	1	0	0	0	1	1
z	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
w	0	8	18	0	0	0	0	-1	-1

	1	2	0	-1	1	0	0	-1	2
	-1	2	0	-2	0	1	0	-2	0
	0	4	0	-3	0	0	1	-3	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	-1	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	0	8	0	-6	0	0	0	-7	-7

Ví dụ

	1	2	0	-1	1	0	0	-1	2
	-1	2	0	-2	0	1	0	-2	0
	0	4	0	-3	0	0	1	-3	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	-1	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	0	8	0	-6	0	0	0	-7	-7

Ví dụ

	1	2	0	-1	1	0	0	-1	2
	-1	②	0	-2	0	1	0	-2	0
	0	4	0	-3	0	0	1	-3	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	-1	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	0	8	0	-6	0	0	0	-7	-7

Ví dụ

	1	2	0	-1	1	0	0	-1	2
	-1	②	0	-2	0	1	0	-2	0
	0	4	0	-3	0	0	1	-3	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	-1	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	0	8	0	-6	0	0	0	-7	-7

	2	0	0	1	1	-1	0	1	2
	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	2	0	0	1	0	-2	1	1	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	4	0	0	2	0	-4	0	1	-7

Ví dụ

	2	0	0	1	1	-1	0	1	2
	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	2	0	0	1	0	-2	1	1	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	4	0	0	2	0	-4	0	1	-7

Ví dụ

	②	0	0	1	1	-1	0	1	2
	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	2	0	0	1	0	-2	1	1	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	4	0	0	2	0	-4	0	1	-7

Ví dụ

	②	0	0	1	1	-1	0	1	2
	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	2	0	0	1	0	-2	1	1	2
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
w	4	0	0	2	0	-4	0	1	-7

	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{6}$
w	0	0	0	0	-2	-2	0	-1	-11

Ví dụ

	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{6}$
w	0	0	0	0	-2	-2	0	-1	-11

Nghiệm tối ưu có $y = 0$ nên bài toán gốc có nghiệm CNĐ.

Ví dụ

	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{6}$
w	0	0	0	0	-2	-2	0	-1	-11

Nghiệm tối ưu có $y = 0$ nên bài toán gốc có nghiệm CNĐ.

Các hệ số của biến x ở dòng 3 bằng 0, do đó đây là điều kiện phụ thuộc tuyến tính và ta có thể loại bỏ.

Ví dụ

	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0
	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z	0	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{6}$
w	0	0	0	0	-2	-2	0	-1	-11

Nghiệm tối ưu có $y = 0$ nên bài toán gốc có nghiệm CNĐ.

Các hệ số của biến x ở dòng 3 bằng 0, do đó đây là điều kiện phụ thuộc tuyến tính và ta có thể loại bỏ.

Bỏ phần bảng đơn hình ứng với biến y và hàm mục tiêu z ta tìm được bảng đơn hình với cơ sở CNĐ xuất phát cho bài toán gốc

Ta có một cơ sở CND xuất phát cho bài toán gốc

$$z \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \hline \frac{11}{6} \end{array}$$

Từ đó ta áp dụng tiếp thuật toán đơn hình để giải bài toán gốc.

Chương 3, D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, and J. Tsitsiklis (1997), Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific.

Lưu ý: Trong sách tác giả giải bài toán min do đó điều kiện tối ưu cũng như cách chọn biến xoay cũng khác. Ở đó ta phải chọn biến có "reduced cost" âm (thay vì dương như chúng ta xét bài toán max).