

Thuật toán đơn hình

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Thuật toán đơn hình (simplex method)

Là 1 trong 10 thuật toán quan trọng nhất của thế kỉ 20.

Thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chính tắc.

Để đơn giản đầu tiên ta xét một bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chuẩn tắc với vế phải không âm

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \end{aligned}$$

Dạng từ điển (Dictionaries)

We must first build a linear system of equations that encodes all of the information associated with the LP.

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \end{array}$$

Slack Variables and Dictionaries

For each linear inequality we introduce a new variable, called a *slack variable* (*biến bù*), so that we can write each linear inequality as an equation.

$$x_4 = 5 - (2x_1 + 3x_2 + x_3) \geq 0,$$

$$x_5 = 11 - (4x_1 + x_2 + 2x_3) \geq 0,$$

$$x_6 = 8 - (3x_1 + 4x_2 + 2x_3) \geq 0.$$

Slack Variables: x_4, x_5, x_6 .

Next we introduce a variable to represent the objective.

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

This system of equations is called a *dictionary* for the the LP.

The slack variables and the objective are defined by the original decision variables.

The LP is now encoded as the system

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & & + & x_6 & = & 8 \\ -z & + & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$
$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

Dictionaries, Augmented Matrices, the Simplex Tableau

The associated augmented matrix (ma trận mở rộng) is

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

with $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

This augmented matrix is called the initial *simplex tableau* (bảng đơn hình).

The simplex tableau is nothing more than an augmented matrix for the linear system that relates all of the LP variables.

Basic and Nonbasic Variables

Recall the initial dictionary for our LP:

$$\begin{aligned}x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3\end{aligned}$$

We call the decision variables on the left (x_4, x_5, x_6) the *basic* variables (biến cơ sở), and those on the right the *nonbasic* variables (x_1, x_2, x_3) (biến ngoài cơ sở hay không cơ sở).

Basic and Nonbasic Variables

Recall the initial dictionary for our LP:

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \end{array}$$

basic

nonbasic

We call the decision variables on the left (x_4, x_5, x_6) the *basic* variables (biến cơ sở), and those on the right the *nonbasic* variables (x_1, x_2, x_3) (biến ngoài cơ sở hay không cơ sở).

Basic and Nonbasic Variables

Recall the initial dictionary for our LP:

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \end{array}$$

basic

nonbasic

We call the decision variables on the left (x_4, x_5, x_6) the *basic* variables (biến cơ sở), and those on the right the *nonbasic* variables (x_1, x_2, x_3) (biến ngoài cơ sở hay không cơ sở).

Lưu ý: Trong bảng đơn hình các cột ứng với biến cơ sở tạo thành ma trận đơn vị. Hệ số của chúng ở dòng hàm mục tiêu là 0, tức là hàm mục tiêu được biểu diễn qua các biến ngoài cơ sở.

Basic Solutions (nghiệm cơ sở) Identified by Dictionaries

We think of the nonbasic variables as taking the value zero. This determines the value of the basic variables and the objective z .

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \end{array}$$

Nonbasic: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Basic: $x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8, z = 0$

This is called the *basic solution* associated with this dictionary.

Basic Solutions (nghiệm cơ sở) Identified by Dictionaries

We think of the nonbasic variables as taking the value zero. This determines the value of the basic variables and the objective z .

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \end{array}$$

Nonbasic: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Basic: $x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8, z = 0$

This is called the *basic solution* associated with this dictionary.

Lưu ý: Các biến ngoài cơ sở bằng 0 và các biến cơ sở được giải theo các biến ngoài cơ sở.

Basic Feasible Solutions (BFS) (nghiệm cơ sở chấp nhận được)

The basic solution

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8$$

is feasible for the LP

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \end{array}$$

Such basic solutions are called *basic feasible solutions* (BFS).

The associated dictionary is said to be a *feasible dictionary*.

In particular, this LP is said to have feasible origin.

Grand Strategy: Pivoting (xoay)

Move from one feasible dictionary to another increasing the value of the objective each time.

$$\begin{aligned}x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3\end{aligned}$$

We do this by choosing a nonbasic variable with a positive coefficient, and then increase its value from zero as much as we can while maintaining feasibility.

Grand Strategy: Pivoting (xoay)

Move from one feasible dictionary to another increasing the value of the objective each time.

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \\ & & & & \uparrow & & & & \end{array}$$

We do this by choosing a nonbasic variable with a positive coefficient, and then increase its value from zero as much as we can while maintaining feasibility.

Grand Strategy: Pivoting (xoay)

Move from one feasible dictionary to another increasing the value of the objective each time.

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \\ & & & & & & \uparrow & & \end{array}$$

We do this by choosing a nonbasic variable with a positive coefficient, and then increase its value from zero as much as we can while maintaining feasibility.

Grand Strategy: Pivoting (xoay)

Move from one feasible dictionary to another increasing the value of the objective each time.

$$\begin{array}{rclclcl} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \\ & & & & & & & & \uparrow \end{array}$$

We do this by choosing a nonbasic variable with a positive coefficient, and then increase its value from zero as much as we can while maintaining feasibility.

Let us increase the value of x_1 from zero.

How much can we increase x_1 and keep all other variables non-negative?

$$0 \leq x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3.$$

Let us increase the value of x_1 from zero.

How much can we increase x_1 and keep all other variables non-negative?

$$0 \leq x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3.$$

Keeping x_4 non-negative implies that we cannot increase x_1 by more than $5/2$. Any further increase will push x_4 negative.

Pivoting

Next consider the variable x_5 :

$$0 \leq x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3.$$

Pivoting

Next consider the variable x_5 :

$$0 \leq x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3.$$

Therefore, we cannot increase x_1 by more than $11/4$.

Pivoting

Next consider the variable x_5 :

$$0 \leq x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3.$$

Therefore, we cannot increase x_1 by more than $11/4$.

Similarly, for x_6 we have

$$0 \leq x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3.$$

Therefore, we cannot increase x_1 by more than $8/3$.

Hence, we must have

$$x_1 \leq \min\{5/2, 11/4, 8/3\} = 5/2.$$

Pivoting

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Pivoting

							ratios		
x_4	$=$	5	$-$	$2x_1$	$-$	$3x_2$	$-$	x_3	$5/2$
x_5	$=$	11	$-$	$4x_1$	$-$	x_2	$-$	$2x_3$	
x_6	$=$	8	$-$	$3x_1$	$-$	$4x_2$	$-$	$2x_3$	
z	$=$			$5x_1$	$+$	$4x_2$	$+$	$3x_3$	

Pivoting

							ratios		
x_4	=	5	-	$2x_1$	-	$3x_2$	-	x_3	$5/2$
x_5	=	11	-	$4x_1$	-	x_2	-	$2x_3$	$11/4$
x_6	=	8	-	$3x_1$	-	$4x_2$	-	$2x_3$	
z	=			$5x_1$	+	$4x_2$	+	$3x_3$	

Pivoting

						ratios			
x_4	=	5	-	$2x_1$	-	$3x_2$	-	x_3	$5/2$
x_5	=	11	-	$4x_1$	-	x_2	-	$2x_3$	$11/4$
x_6	=	8	-	$3x_1$	-	$4x_2$	-	$2x_3$	$8/3$
z	=			$5x_1$	+	$4x_2$	+	$3x_3$	

Pivoting

						ratios			
x_4	=	5	-	$2x_1$	-	$3x_2$	-	x_3	$5/2$ ← smallest ratio
x_5	=	11	-	$4x_1$	-	x_2	-	$2x_3$	$11/4$
x_6	=	8	-	$3x_1$	-	$4x_2$	-	$2x_3$	$8/3$
z	=			$5x_1$	+	$4x_2$	+	$3x_3$	

Pivoting

						ratios				
x_4	$=$	5	$-$	$2x_1$	$-$	$3x_2$	$-$	x_3	$5/2$	\leftarrow smallest ratio
x_5	$=$	11	$-$	$4x_1$	$-$	x_2	$-$	$2x_3$	$11/4$	
x_6	$=$	8	$-$	$3x_1$	$-$	$4x_2$	$-$	$2x_3$	$8/3$	
z	$=$			$5x_1$	$+$	$4x_2$	$+$	$3x_3$		

If we increase x_1 to $5/2$, then x_4 decreases to zero.

In this case we say x_4 leaves the basis and x_1 enters.

Moving x_4 to the rhs and x_1 to the lhs gives

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

Pivoting

We now have

$$\begin{array}{rclclclcl} x_1 & = & (5/2) & - & (1/2)x_4 & - & (3/2)x_2 & - & (1/2)x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \end{array}$$

Now use the first equation to remove x_1 from the rhs to recover a dictionary.

Pivoting

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

$$\begin{aligned}x_5 &= 11 - 4 \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right) - x_2 - 2x_3 \\ &= 1 + 2x_4 + 5x_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_6 &= 8 - 3 \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right) - 4x_2 - 2x_3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= 5 \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \right) + 4x_2 + 3x_3 \\ &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3.\end{aligned}$$

New Dictionary

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 5x_2 \\x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\z &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\end{aligned}$$

New BFS:

Nonbasic Variables: $x_4 = x_2 = x_3 = 0$

Basic Variables: $x_1 = 5/2, x_5 = 1, x_6 = 1/2$

Objective value: $z = 25/2$

The Second Pivot

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 5x_2 \\x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\z &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\end{aligned}$$

The Second Pivot

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 5x_2 \\x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\z &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\end{aligned}$$

↑
pos.

The Second Pivot

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & \text{ratios} \\ x_5 & = & 1 & + & 2x_4 & + & 5x_2 & & & \\ x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{3}{2}x_4 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & \\ z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{5}{2}x_4 & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & \end{array}$$

The Second Pivot

$$\begin{array}{rcllclcl} x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & & \text{ratios} \\ x_5 & = & 1 & + & 2x_4 & + & 5x_2 & & & & 5 \\ x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{3}{2}x_4 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & & \\ z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{5}{2}x_4 & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & & \end{array}$$

The Second Pivot

						ratios			
x_1	$=$	$\frac{5}{2}$	$-$	$\frac{1}{2}x_4$	$-$	$\frac{3}{2}x_2$	$-$	$\frac{1}{2}x_3$	5
x_5	$=$	1	$+$	$2x_4$	$+$	$5x_2$			
x_6	$=$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{3}{2}x_4$	$+$	$\frac{1}{2}x_2$	$-$	$\frac{1}{2}x_3$	1
z	$=$	$\frac{25}{2}$	$-$	$\frac{5}{2}x_4$	$-$	$\frac{7}{2}x_2$	$+$	$\frac{1}{2}x_3$	

The Second Pivot

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & \text{ratios} \\ & & & & & & & & & 5 \\ x_5 & = & 1 & + & 2x_4 & + & 5x_2 & & & \\ x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{3}{2}x_4 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & 1 \rightarrow \text{smallest} \\ z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{5}{2}x_4 & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & \end{array}$$

The Second Pivot

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & & & \text{ratios} \\ x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{2}x_4 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & & 5 \\ x_5 & = & 1 & + & 2x_4 & + & 5x_2 & & & & \\ x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{3}{2}x_4 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & & 1 \rightarrow \text{smallest} \\ z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{5}{2}x_4 & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & & \end{array}$$

x_3 enters the basis and x_6 leaves.

$$x_3 = 1 + 3x_4 + x_2 - 2x_6$$

The Second Pivot

The new dictionary is

$$\begin{aligned}x_3 &= 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6 \\x_1 &= 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 2x_2 \\z &= 13 - x_4 - 3x_2 - x_6,\end{aligned}$$

The BFS identified by this dictionary is

Nonbasic variables: $x_4 = x_2 = x_6 = 0$

Basic variables: $x_1 = 2, x_3 = 1, x_5 = 1$

Objective value: $z = 13$.

The Third Pivot

$$\begin{aligned}x_3 &= 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6 \\x_1 &= 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 2x_2 \\z &= 13 - x_4 - 3x_2 - x_6,\end{aligned}$$

What nonbasic variable should enter the basis?

The Third Pivot

$$\begin{aligned}x_3 &= 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6 \\x_1 &= 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 2x_2 \\z &= 13 - x_4 - 3x_2 - x_6,\end{aligned}$$

What nonbasic variable should enter the basis?

No candidate! All have a negative coefficient in the z row.

If we increase the value of any nonbasic variable, the value of the objective will be reduced.

What does this mean?

The Third Pivot

$$\begin{aligned}x_3 &= 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6 \\x_1 &= 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6 \\x_5 &= 1 + 2x_4 + 2x_2 \\z &= 13 - x_4 - 3x_2 - x_6,\end{aligned}$$

What nonbasic variable should enter the basis?

No candidate! All have a negative coefficient in the z row.

If we increase the value of any nonbasic variable, the value of the objective will be reduced.

What does this mean? **The current BFS is optimal!**

Optimal BFS and Dictionary

The optimal dictionary is

$$x_3 = 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6$$

$$x_1 = 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 2x_4 + 2x_2$$

$$z = 13 - x_4 - 3x_2 - x_6$$

Optimal BFS and Dictionary

The optimal dictionary is

$$x_3 = 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6$$

$$x_1 = 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 2x_4 + 2x_2$$

$$z = 13 - x_4 - 3x_2 - x_6$$

feasible

Optimal BFS and Dictionary

The optimal dictionary is

$$x_3 = 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6$$

$$x_1 = 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 2x_4 + 2x_2$$

$$z = 13 - x_4 - 3x_2 - x_6$$

feasible

→ all neg. coef.s

Optimal BFS and Dictionary

The optimal dictionary is

$$x_3 = 1 - 3x_4 - x_2 - 2x_6$$

$$x_1 = 2 - 2x_4 - 2x_2 + x_6$$

$$x_5 = 1 + 2x_4 + 2x_2$$

$$z = 13 - x_4 - 3x_2 - x_6$$

feasible

→ all neg. coef.s

The optimal BFS is $x = (2, 0, 1, 0, 1, 0)^T$.

The optimal value is $z = 13$.

The Simplex Algorithm

The process of moving from one feasible dictionary to another is called *simplex pivoting* (*phép xoay đơn hình*).

The Simplex Algorithm

The process of moving from one feasible dictionary to another is called *simplex pivoting* (*phép xoay đơn hình*).

The process of pivoting from one feasible dictionary to the next until optimality is obtained is called the *simplex algorithm*.

The Simplex Algorithm

The process of moving from one feasible dictionary to another is called *simplex pivoting* (*phép xoay đơn hình*).

The process of pivoting from one feasible dictionary to the next until optimality is obtained is called the *simplex algorithm*.

A pivot corresponds to doing Gauss-Jordan elimination on the column in the simplex tableau (augmented matrix) corresponding to the incoming variable.

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3 \end{aligned}$$

The linear system associated with the initial dictionary is given by

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 &= 8 \\ -z + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 0 &\leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. \end{aligned}$$

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & & + & x_6 & = & 8 \\ -z & + & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & & + & x_6 & = & 8 \\ -z & + & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

The augmented matrix associated with the initial dictionary is

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & A & I & b \\ \hline -1 & c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & & + & x_6 & = & 8 \\ -z & + & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

The augmented matrix associated with the initial dictionary is

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & A & I & b \\ \hline -1 & c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & A & I & b \\ \hline -1 & c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & A & I & b \\ \hline -1 & c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

↑

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & A & I & b \\ \hline -1 & c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ratios
5/2 ←
11/4
8/3

↑

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & A & I & b \\ \hline -1 & c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ratios} \\ 5/2 \leftarrow \\ 11/4 \\ 8/3 \end{array}$$

↑

Which variables are in the basis?

Columns of the identity.

How do we choose the variable to enter the basis?

Simplex Pivoting on the Augmented Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & A & I & b \\ \hline -1 & c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{ratios} \\ 5/2 \leftarrow \\ 11/4 \\ 8/3 \end{array}$$

↑

Which variables are in the basis?

Columns of the identity.

How do we choose the variable to enter the basis?

How do we choose the variable to leave the basis?

Simplex Tableau Pivot

							ratios	
0	↓ ②	3	1	1	0	0	5	⑤/2
0	4	1	2	0	1	0	11	11/4
0	3	4	2	0	0	1	8	8/3
-1	⑤	4	3	0	0	0	0	

Simplex Tableau Pivot

Pivot column (cột xoay)								ratios
0	②	3	1	1	0	0	5	⑤/2
0	4	1	2	0	1	0	11	11/4
0	3	4	2	0	0	1	8	8/3
-1	⑤	4	3	0	0	0	0	

Simplex Tableau Pivot

Pivot column (cột xoay)								ratios
0	②	3	1	1	0	0	5	⑤/2 ← Pivot row
0	4	1	2	0	1	0	11	11/4
0	3	4	2	0	0	1	8	8/3
-1	⑤	4	3	0	0	0	0	

Dùng phép biến đổi sơ cấp đưa cột xoay về cột đơn vị

Simplex Tableau Pivot

Pivot column (cột xoay)								ratios
0	②	3	1	1	0	0	5	⑤/2 ← Pivot row
0	4	1	2	0	1	0	11	11/4
0	3	4	2	0	0	1	8	8/3
-1	⑤	4	3	0	0	0	0	
<hr/>								
0	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2	

Dùng phép biến đổi sơ cấp đưa cột xoay về cột đơn vị

Simplex Tableau Pivot

Pivot column (cột xoay)								ratios
0	②	3	1	1	0	0	5	⑤/2 ← Pivot row
0	4	1	2	0	1	0	11	11/4
0	3	4	2	0	0	1	8	8/3
-1	⑤	4	3	0	0	0	0	
<hr/>								
0	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2	
0	0	-5	0	-2	1	0	1	

Dùng phép biến đổi sơ cấp đưa cột xoay về cột đơn vị

Simplex Tableau Pivot

Pivot column (cột xoay)								ratios
0	②	3	1	1	0	0	5	⑤/2 ← Pivot row
0	4	1	2	0	1	0	11	11/4
0	3	4	2	0	0	1	8	8/3
-1	⑤	4	3	0	0	0	0	
<hr/>								
0	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2	
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2	

Dùng phép biến đổi sơ cấp đưa cột xoay về cột đơn vị

Simplex Tableau Pivot

Pivot column (cột xoay)								ratios
0	2	3	1	1	0	0	5	$\frac{5}{2}$ ← Pivot row
0	4	1	2	0	1	0	11	$\frac{11}{4}$
0	3	4	2	0	0	1	8	$\frac{8}{3}$
-1	5	4	3	0	0	0	0	
<hr/>								
0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	
-1	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{25}{2}$	

Dùng phép biến đổi sơ cấp đưa cột xoay về cột đơn vị

Simplex Tableau and Its Dictionary

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline -1 & 0 & -7/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 0 & -25/2 \end{array} \right],$$

Simplex Tableau and Its Dictionary

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline -1 & 0 & -7/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 0 & -25/2 \end{array} \right],$$

Các biến ngoài cơ sở $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ tức là ta có $-z = -25/2$. Như vậy số đối của giá trị góc dưới bên phải chính là giá trị hiện tại của hàm mục tiêu.

Simplex Tableau and Its Dictionary

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline -1 & 0 & -7/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 0 & -25/2 \end{array} \right],$$

Các biến ngoài cơ sở $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ tức là ta có $-z = -25/2$. Như vậy số đối của giá trị góc dưới bên phải chính là giá trị hiện tại của hàm mục tiêu.

This tableau is the augmented matrix for the dictionary

Simplex Tableau and Its Dictionary

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ \hline -1 & 0 & -7/2 & 1/2 & -5/2 & 0 & 0 & -25/2 \end{array} \right],$$

Các biến ngoài cơ sở $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ tức là ta có $-z = -25/2$. Như vậy số đối của giá trị góc dưới bên phải chính là giá trị hiện tại của hàm mục tiêu.

This tableau is the augmented matrix for the dictionary

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ z &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \end{aligned}$$

Second Simplex Pivot on the Tableau

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$
0	0	-5	0	-2	1	0	1
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$

Second Simplex Pivot on the Tableau

Pivot
column
↓

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$
0	0	-5	0	-2	1	0	1
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$

Second Simplex Pivot on the Tableau

							ratios	
			Pivot column					
0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$	

Second Simplex Pivot on the Tableau

								ratios	
0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5	
0	0	-5	0	-2	1	0	1		
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1 ← Pivot row	
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$		

Second Simplex Pivot on the Tableau

ratios

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$	
<hr/>								
<hr/>								
<hr/>								
<hr/>								

Second Simplex Pivot on the Tableau

ratios

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$	
<hr/>								
0	0	-1	1	-3	0	2	1	
<hr/>								

Second Simplex Pivot on the Tableau

ratios

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$	
0	1	2	0	2	0	-1	2	
0	0	-1	1	-3	0	2	1	

Second Simplex Pivot on the Tableau

ratios

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$	
0	1	2	0	2	0	-1	2	
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	-1	1	-3	0	2	1	

Second Simplex Pivot on the Tableau

ratios

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$	
<hr/>								
0	1	2	0	2	0	-1	2	
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	-1	1	-3	0	2	1	
-1	0	-3	0	-1	0	-1	-13	

Second Simplex Pivot on the Tableau

ratios

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$	1
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$	
<hr/>								
0	1	2	0	2	0	-1	2	
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	-1	1	-3	0	2	1	
-1	0	-3	0	-1	0	-1	-13	

Optimal Solution: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1)$

Second Simplex Pivot on the Tableau

ratios

0	1	3/2	1/2	1/2	0	0	5/2	5
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	-1/2	1/2	-3/2	0	1	1/2	1
-1	0	-7/2	1/2	-5/2	0	0	-25/2	
<hr/>								
0	1	2	0	2	0	-1	2	
0	0	-5	0	-2	1	0	1	
0	0	-1	1	-3	0	2	1	
-1	0	-3	0	-1	0	-1	-13	

Optimal Solution: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1)$

Optimal Value: $z = 13$

Recap: Tableau Pivoting

0	②	3	1	1	0	0	5
0	4	1	2	0	1	0	11
0	3	4	2	0	0	1	8
-1	5	4	3	0	0	0	0

0	1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$
0	0	-5	0	-2	1	0	1
0	0	$-1/2$	① $1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$
-1	0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$

0	1	2	0	2	0	-1	2
0	0	-5	0	-2	1	0	1
0	0	-1	1	-3	0	2	1
-1	0	-3	0	-1	0	-1	-13

Xóa cột z

②	3	1	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	2	0	0	1	8
5	4	3	0	0	0	0

1	$3/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	$5/2$
0	-5	0	-2	1	0	1
0	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	0	1	$1/2$
0	$-7/2$	$1/2$	$-5/2$	0	0	$-25/2$

1	2	0	2	0	-1	2
0	-5	0	-2	1	0	1
0	-1	1	-3	0	2	1
0	-3	0	-1	0	-1	-13

Another Example

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 3x + 2y - 4z \\ \text{subject to} & x + 4y \leq 5 \\ & 2x + 4y - 2z \leq 6 \\ & x + y - 2z \leq 2 \\ & 0 \leq x, y, z \end{array}$$

Second Example: Tableau Pivoting

							ratios
1	4	0	1	0	0	5	5
2	4	-2	0	1	0	6	3
①	1	-2	0	0	1	2	2
3	2	-4	0	0	0	0	
0	3	2	1	0	-1	3	3/2
0	2	②	0	1	-2	2	1
1	1	-2	0	0	1	2	
0	-1	2	0	0	-3	-6	
0	1	0	1	-1	1	1	
0	1	1	0	1/2	-1	1	
1	3	0	0	1	-1	4	
0	-3	0	0	-1	-1	-8	

Bài toán không bị chặn

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2. \end{aligned}$$

Bài toán không bị chặn

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2. \end{aligned}$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc sử dụng biến bù

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_3 = 7 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 8 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4. \end{aligned}$$

Bài toán không bị chặn

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Chọn cột nào làm cột xoay?

Bài toán không bị chặn

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Chọn cột nào làm cột xoay?

Chọn cột 2 thì tỉ số như thế nào?

Bài toán không bị chặn

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Chọn cột nào làm cột xoay?

Chọn cột 2 thì tỉ số như thế nào?

x_2 có thể tăng tùy ý. Và do đó bài toán không bị chặn.

Bài toán không bị chặn

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Chọn cột nào làm cột xoay?

Chọn cột 2 thì tỉ số như thế nào?

x_2 có thể tăng tùy ý. Và do đó bài toán không bị chặn.

Tổng quát hóa, nếu tồn tại một biến ngoài cơ sở có hệ số hàm mục tiêu dương và các hệ số điều kiện không dương thì bài toán là không bị chặn (với max).

Các bước cơ bản của thuật toán đơn hình

1. Đưa LP về dạng chính tắc.
2. Tìm một cơ sở chấp nhận được để xuất phát hoặc chỉ ra bài toán không có nghiệm chấp nhận được.
3. Từ đó thực hiện phép xoay (pivoting) đến khi tìm được nghiệm tối ưu hoặc chỉ ra bài toán không bị chặn.

Tìm cơ sở chấp nhận được để xuất phát

Với dạng chính tắc có vẻ phải không âm ta chỉ cần thêm biến bù để đưa về dạng chính tắc và các biến bù tạo nên một cơ sở chấp nhận được.

Tìm cơ sở chấp nhận được để xuất phát

Với dạng chính tắc có vẻ phải không âm ta chỉ cần thêm biến bù để đưa về dạng chính tắc và các biến bù tạo nên một cơ sở chấp nhận được.

Ở dạng tổng quát sẽ không đơn giản như vậy.

Tìm cơ sở chấp nhận được để xuất phát

Xét ví dụ sau

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -x + y - z \\ \text{subject to} & 2x - y + 2z \leq 4 \\ & 2x - 3y + z \leq -5 \\ & -x + y - 2z \leq -1 \\ & 0 \leq x, y, z \end{array}$$

Đây là 1 LP ở dạng chuẩn tắc mà về phải có thành phần âm.

Tìm cơ sở chấp nhận được để xuất phát

Xét ví dụ sau

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -x + y - z \\ \text{subject to} & 2x - y + 2z \leq 4 \\ & 2x - 3y + z \leq -5 \\ & -x + y - 2z \leq -1 \\ & 0 \leq x, y, z \end{array}$$

Đây là 1 LP ở dạng chuẩn tắc mà vế phải có thành phần âm. Cơ sở từ các biến bù không tạo ra nghiệm chấp nhận được.

Tìm cơ sở chấp nhận được để xuất phát

Xét ví dụ sau

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -x + y - z \\ \text{subject to} & 2x - y + 2z \leq 4 \\ & 2x - 3y + z \leq -5 \\ & -x + y - 2z \leq -1 \\ & 0 \leq x, y, z \end{array}$$

Đây là 1 LP ở dạng chuẩn tắc mà về phải có thành phần âm. Cơ sở từ các biến bù không tạo ra nghiệm chấp nhận được.

Với các LP tổng quát khi chọn các biến cơ sở để xuất phát thì phải đảm bảo ma trận con tương ứng khả nghịch (để có thể là biến cơ sở) và nghiệm tạo ra là nghiệm chấp nhận được.

Tìm cơ sở chấp nhận được để xuất phát

Xét ví dụ sau

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -x + y - z \\ \text{subject to} & 2x - y + 2z \leq 4 \\ & 2x - 3y + z \leq -5 \\ & -x + y - 2z \leq -1 \\ & 0 \leq x, y, z \end{array}$$

Đây là 1 LP ở dạng chuẩn tắc mà về phải có thành phần âm. Cơ sở từ các biến bù không tạo ra nghiệm chấp nhận được.

Với các LP tổng quát khi chọn các biến cơ sở để xuất phát thì phải đảm bảo ma trận con tương ứng khả nghịch (để có thể là biến cơ sở) và nghiệm tạo ra là nghiệm chấp nhận được.

Thuật toán đơn hình 2 pha sẽ giải quyết vấn đề này.