# Lý thuyết đa diện

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

# Đa diện và tập lồi

## Siêu phẳng, nửa không gian và đa diện

**Định nghĩa 1**

*Một đa diện là một tập hợp có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\},$$

*trong đó* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *và* $b \in \mathbb{R}^m$.

**Định nghĩa 2**

*Một tập hợp* $S \subset \mathbb{R}^n$ *được gọi là bị chặn nếu tồn tại hằng số* $K$ *sao cho* $|x_i| < K$ *với* $i = 1, 2, \ldots, n$ *với mọi* $x \in S$.

**Định nghĩa 3**

*Cho* $a \in \mathbb{R}^n$ *và* $b \in \mathbb{R}$.

a) *Tập hợp* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ *được gọi là một siêu phẳng.*

b) *Tập hợp* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$ *được gọi là một nửa không gian.*

## Đa diện - ví dụ

- Toàn bộ không gian
- Tập hợp rỗng
- Nửa không gian
- Siêu phẳng
- Các đa giác trong không gian hai chiều
- ...

- Hình tròn hay hình cầu không phải là một đa diện

# Tập lồi và tổ hợp lồi

**Định nghĩa 4**

*Một tập hợp* $S \subset \mathbb{R}^n$ *được gọi là lồi nếu với mọi* $x, y \in S$ *và* $\lambda \in [0, 1]$ *ta có* $\lambda x + (1 - \lambda) y \in S$.

# Tập lồi và tổ hợp lồi

## Định nghĩa 4

*Một tập hợp* $S \subset \mathbb{R}^n$ *được gọi là lồi nếu với mọi* $x, y \in S$ *và* $\lambda \in [0,1]$ *ta có* $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

## Định nghĩa 5

*Cho* $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ *và các hệ số không âm* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *thỏa mãn* $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

a) *Vectơ* $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ *được gọi là một tổ hợp lồi của các vectơ* $x^1, \dots, x^k$.

b) *Bao lồi của các vectơ* $x^1, \dots, x^k$, *kí hiệu* $\text{conv}(x^1, \dots, x^k)$, *là tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của các vectơ đó.*

# Một số kết quả về tập lồi

**Định lý 1**

1. *Giao của các tập lồi là một tập lồi*
2. *Mỗi đa diện là một tập lồi*
3. *Tổ hợp lồi của hữu hạn phần tử thuộc một tập lồi cũng thuộc vào tập hợp đó*
4. *Bao lồi của hữu hạn vectơ là một tập hợp lồi.*

# Điểm cực, đỉnh và nghiệm cơ sở chấp nhận được

# Điểm cực

**Định nghĩa 6**

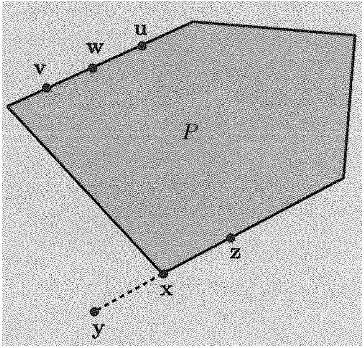
*Cho $P$ là một đa diện. Một vectơ $x \in P$ được gọi là một điểm cực (extreme point) của $P$ nếu ta không thể tìm được hai vectơ $y, z \in P \backslash \{x\}$ và $\lambda \in [0, 1]$ sao cho $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$.*

# Điểm cực

**Định nghĩa 6**

*Cho $P$ là một đa diện. Một vectơ $x \in P$ được gọi là một điểm cực (extreme point) của $P$ nếu ta không thể tìm được hai vectơ $y, z \in P \backslash \{x\}$ và $\lambda \in [0, 1]$ sao cho $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$.*

- $w$ không phải là một điểm cực vì nó là một tổ hợp lồi của $v$ và $u$.
- $x$ là một điểm cực vì nếu $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ với một số $\lambda \in [0, 1]$ thì hoặc là $y \notin P$, hoặc $z \notin P$, hoặc $x = y$, hoặc $x = z$.



## Đỉnh

**Định nghĩa 7**

*Cho* $P \subset \mathbb{R}^n$ *là một đa diện. Một vectơ* $x \in P$ *được gọi là đỉnh (vertex) của* $P$ *nếu tồn tại* $c \in \mathbb{R}^n$ *sao cho*

$$c^T x < c^T y, \ \forall y \in P \backslash \{x\}.$$

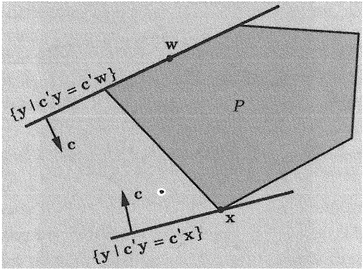
# Đỉnh

**Định nghĩa 7**

*Cho $P \subset \mathbb{R}^n$ là một đa diện. Một vectơ $x \in P$ được gọi là đỉnh (vertex) của $P$ nếu tồn tại $c \in \mathbb{R}^n$ sao cho*

$$c^T x < c^T y, \ \forall y \in P \backslash \{x\}.$$

- $x$ là một đỉnh, đường thẳng phía dưới trong hình vẽ tiếp xúc với $P$ tại duy nhất 1 điểm $x$.
- $w$ không phải là một đỉnh vì không tồn tại siêu phẳng chỉ cắt $P$ tại duy nhất 1 điểm.



## Nhận xét

- Hai định nghĩa về đỉnh và điểm cực là hai định nghĩa hình học và không dễ làm việc với trên phương diện thuật toán.

# Nhận xét

- Hai định nghĩa về đỉnh và điểm cực là hai định nghĩa hình học và không dễ làm việc với trên phương diện thuật toán.
- Ta mong muốn có một đối tượng dựa trên biểu diễn của đa diện qua các ràng buộc tuyến tính và có thể kiểm tra thông qua các phép toán (đại số tuyến tính).

# Nghiệm cơ sở chấp nhận được

Xét đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ được cho bởi hệ điều kiện ràng buộc

$$a_i^T x \geq b_i,\ i \in M_1$$
$$a_i^T x \leq b_i,\ i \in M_2$$
$$a_i^T x = b_i,\ i \in M_3$$

với $M_1$, $M_2$ và $M_3$ là các tập chỉ số hữu hạn.

# Nghiệm cơ sở chấp nhận được

Xét đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ được cho bởi hệ điều kiện ràng buộc

$$a_i^T x \geq b_i, \; i \in M_1$$
$$a_i^T x \leq b_i, \; i \in M_2$$
$$a_i^T x = b_i, \; i \in M_3$$

với $M_1$, $M_2$ và $M_3$ là các tập chỉ số hữu hạn.

**Định nghĩa 8**

*Nếu một vectơ $x^*$ thỏa mãn điều kiện $a_i^T x^* = b_i$ cho chỉ số $i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$ thì ta nói là ràng buộc tương ứng active (hay binding) tại $x^*$.*

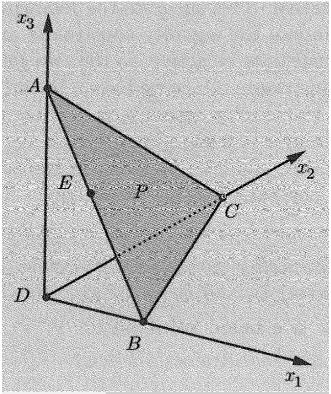
# Ví dụ

Xét đa diện $P$ cho bởi

$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}$.

Có 3 ràng buộc active tại mỗi điểm $A$, $B$, $C$ và $D$.

Trong khi đó chỉ có 2 điều kiện active tại $E$ là $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ và $x_2 = 0$.



# Một kết quả từ ĐSTT

**Định lý 2**

*Xét $x^* \in \mathbb{R}^n$ và gọi $I = \{i \mid a_i^T x^* = b_i\}$ là tập hợp chỉ số của các ràng buộc active tại $x^*$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương*

1. *Tồn tại n vectơ độc lập tuyến tính trong tập hợp $\{a_i \mid i \in I\}$.*
2. *$span(\{a_i \mid i \in I\}) = \mathbb{R}^n$, tức là mỗi vectơ thuộc $\mathbb{R}^n$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vectơ $a_i$, $i \in I$.*
3. *Hệ phương trình $a_i^T x = b_i$, $i \in I$, có một nghiệm duy nhất.*

# Một kết quả từ ĐSTT

**Định lý 2**

*Xét $x^* \in \mathbb{R}^n$ và gọi $I = \{i \mid a_i^T x^* = b_i\}$ là tập hợp chỉ số của các ràng buộc active tại $x^*$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương*

1. *Tồn tại $n$ vectơ độc lập tuyến tính trong tập hợp $\{a_i \mid i \in I\}$.*
2. *$span(\{a_i \mid i \in I\}) = \mathbb{R}^n$, tức là mỗi vectơ thuộc $\mathbb{R}^n$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vectơ $a_i$, $i \in I$.*
3. *Hệ phương trình $a_i^T x = b_i$, $i \in I$, có một nghiệm duy nhất.*

**Lưu ý**: Trong các phần sau, khi ta nói một số ràng buộc nhất định độc lập tuyến tính (hay phụ thuộc tuyến tính) có nghĩa là các vectơ tạo bởi các hệ số của các vế trái độc lập tuyến tính (hay phụ thuộc tuyến tính).

# Nghiệm cơ sở chấp nhận được

**Định nghĩa 9**

*Xét một đa diện P được định nghĩa bởi một hệ các điều kiện ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính và một phần tử $x^* \in \mathbb{R}^n$.*

a) *Vectơ $x^*$ được gọi là một nghiệm cơ sở (basic solution) nếu*
   - *Mọi điều kiện đẳng thức được thỏa mãn (active)*
   - *Trong số các điều kiện active tại $x^*$, có n điều kiện độc lập tuyến tính.*

b) *Nếu $x^*$ là một nghiệm cơ sở và thỏa mãn mọi điều kiện ràng buộc thì nó được gọi là một nghiệm cơ sở chấp nhận được (basic feasible solution).*

# Ví dụ

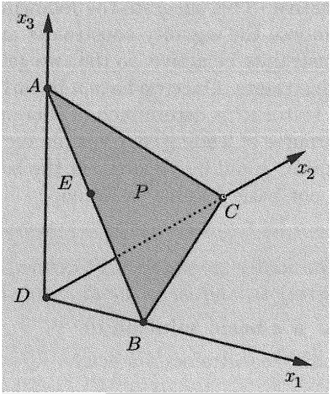
Xét đa diện $P$ cho bởi

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}.$$

$A$, $B$ và $C$ là các nghiệm cơ sở CNĐ.

$D$ không phải là nghiệm cơ sở (không thỏa mãn điều kiện đẳng thức) và không phải là nghiệm CNĐ.

$E$ là nghiệm CNĐ nhưng không phải là nghiệm cơ sở.



# Ví dụ

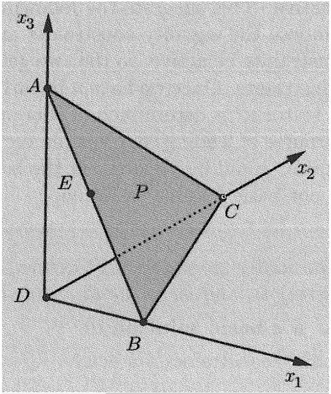
Xét đa diện $P$ cho bởi

$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}$.

$A$, $B$ và $C$ là các nghiệm cơ sở CNĐ.

$D$ không phải là nghiệm cơ sở (không thỏa mãn điều kiện đẳng thức) và không phải là nghiệm CNĐ.

$E$ là nghiệm CNĐ nhưng không phải là nghiệm cơ sở.




**Lưu ý:** Nếu ta thay thế điều kiện đẳng thức $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ bởi hai điều kiện bất đẳng thức $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ và $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ thì $D$ lại trở thành nghiệm cơ sở.

## Ví dụ

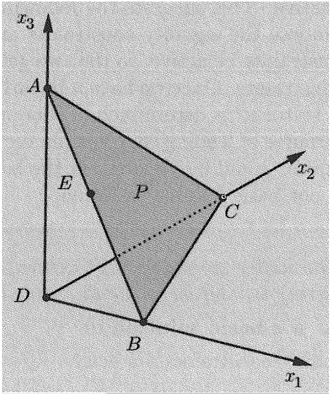
Xét đa diện $P$ cho bởi

$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}$.

$A$, $B$ và $C$ là các nghiệm cơ sở CNĐ.

$D$ không phải là nghiệm cơ sở (không thỏa mãn điều kiện đẳng thức) và không phải là nghiệm CNĐ.

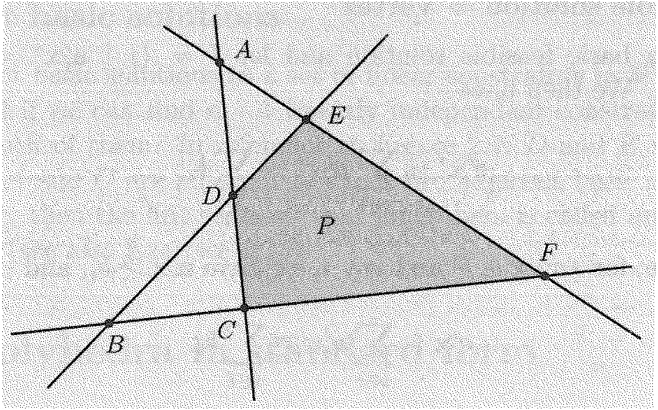
$E$ là nghiệm CNĐ nhưng không phải là nghiệm cơ sở.




**Lưu ý:** Nếu ta thay thế điều kiện đẳng thức $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ bởi hai điều kiện bất đẳng thức $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ và $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ thì $D$ lại trở thành nghiệm cơ sở.

Do đó một vectơ là nghiệm cơ sở hay không có thể phụ thuộc vào dạng biểu diễn của đa diện.

## Ví dụ




$A$, $B$, $C$, $D$, $E$ và $F$ đều là các nghiệm cơ sở.

$C$, $D$, $E$ và $F$ là các nghiệm cơ sở CNĐ.

# Lưu ý

Nếu số lượng $m$ các điều kiện dùng để định nghĩa một đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ nhỏ hơn $n$ thì số điều kiện active tại mỗi điểm đều nhỏ hơn $n$ và do đó sẽ không có nghiệm cơ sở hay cơ sở CNĐ.

Ví dụ: Các nửa không gian hay siêu phẳng.

# Sự tương đương giữa 3 khái niệm

**Định lý 3**

*Xét một đa diện $P \neq \emptyset$ và $x^* \in P$. Các điều sau là tương đương*

1. $x^*$ *là một đỉnh*
2. $x^*$ *là một điểm cực*
3. $x^*$ *là một nghiệm cơ sở CNĐ.*

# Sự tương đương giữa 3 khái niệm

**Định lý 3**

*Xét một đa diện $P \neq \emptyset$ và $x^* \in P$. Các điều sau là tương đương*

1. $x^*$ *là một đỉnh*
2. $x^*$ *là một điểm cực*
3. $x^*$ *là một nghiệm cơ sở CNĐ.*

**Chứng minh:** Xem CM của Định lí 2.3 trong tài liệu tham khảo.

# Sự tương đương giữa 3 khái niệm

**Định lý 3**

*Xét một đa diện $P \neq \emptyset$ và $x^* \in P$. Các điều sau là tương đương*

1. *$x^*$ là một đỉnh*
2. *$x^*$ là một điểm cực*
3. *$x^*$ là một nghiệm cơ sở CNĐ.*

**Chứng minh:** Xem CM của Định lí 2.3 trong tài liệu tham khảo.

**Nhận xét:**

- Không phải đa diện nào cũng có đỉnh. Ví dụ như siêu phẳng, nửa không gian hay toàn bộ không gian không có đỉnh.

## Sự tương đương giữa 3 khái niệm

**Định lý 3**

*Xét một đa diện* $P \neq \emptyset$ *và* $x^* \in P$*. Các điều sau là tương đương*

1. $x^*$ *là một đỉnh*
2. $x^*$ *là một điểm cực*
3. $x^*$ *là một nghiệm cơ sở CNĐ.*

**Chứng minh:** Xem CM của Định lí 2.3 trong tài liệu tham khảo.

**Nhận xét:**

- Không phải đa diện nào cũng có đỉnh. Ví dụ như siêu phẳng, nửa không gian hay toàn bộ không gian không có đỉnh.
- Khái niệm nghiệm cơ sở CNĐ không phụ thuộc vào dạng biểu diễn của đa diện (do nó tương đương với điểm cực) khác với khái niệm nghiệm cơ sở.

# Sự hữu hạn của nghiệm cơ sở

**Bổ đề 1**

*Cho trước một số hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính, ta sẽ chỉ có hữu hạn các nghiệm cơ sở và nghiệm cơ sở CNĐ*

## Sự hữu hạn của nghiệm cơ sở

**Bổ đề 1**

*Cho trước một số hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính, ta sẽ chỉ có hữu hạn các nghiệm cơ sở và nghiệm cơ sở CNĐ*

**Chứng minh.**

Xét hệ $m$ bất đẳng thức tuyến tính với biến $x \in \mathbb{R}^n$. Mỗi nghiệm cơ sở active tại (ít nhất) $n$ điều kiện đltt. Hệ với $n$ biến và $n$ ràng buộc đltt có duy nhất 1 nghiệm. Do đó

$$\text{Số nghiệm cơ sở} \leq \text{Số cách chọn hệ } n \text{ ràng buộc đltt} \leq C_m^n$$

$\square$

# Sự hữu hạn của nghiệm cơ sở

**Bổ đề 1**

*Cho trước một số hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính, ta sẽ chỉ có hữu hạn các nghiệm cơ sở và nghiệm cơ sở CNĐ*

**Chứng minh.**

Xét hệ $m$ bất đẳng thức tuyến tính với biến $x \in \mathbb{R}^n$. Mỗi nghiệm cơ sở active tại (ít nhất) $n$ điều kiện đltt. Hệ với $n$ biến và $n$ ràng buộc đltt có duy nhất 1 nghiệm. Do đó

$$\text{Số nghiệm cơ sở} \leq \text{Số cách chọn hệ } n \text{ ràng buộc đltt} \leq C_m^n$$

□

Do đó số đỉnh, số điểm cực của một đa diện cho trước là hữu hạn.

# Nghiệm cơ sở kề

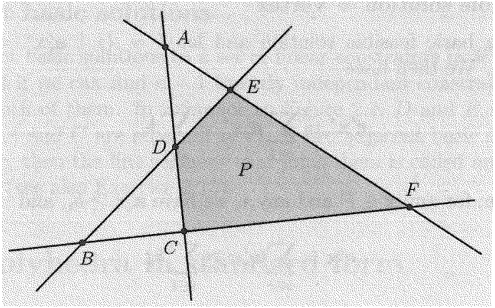
**Định nghĩa 10**

*Hai nghiệm cơ sở khác nhau của một hệ các điều kiện tuyến tính trong* $\mathbb{R}^n$ *được gọi là kề nhau (adjacent) nếu ta có thể tìm được* $n-1$ *điều kiện đltt cùng active tại cả hai nghiệm này.*

# Nghiệm cơ sở kề

**Định nghĩa 10**

*Hai nghiệm cơ sở khác nhau của một hệ các điều kiện tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là kề nhau (adjacent) nếu ta có thể tìm được $n-1$ điều kiện đltt cùng active tại cả hai nghiệm này.*




$D$ và $E$ kề với $B$. Trong khi đó $A$ và $C$ kề với $D$.

# Đa diện ở dạng chính tắc

# Giả thiết

Xét đa diện ở dạng chính tắc $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ với $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

# Giả thiết

Xét đa diện ở dạng chính tắc $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ với $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Giả thiết $m$ hàng của $A$ độc lập tuyến tính. Khi đó $m \leq n$.

# Giả thiết

Xét đa diện ở dạng chính tắc $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ với $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Giả thiết $m$ hàng của $A$ độc lập tuyến tính. Khi đó $m \leq n$.

Sau này ta sẽ thấy, trong trường hợp $P \neq \emptyset$, các hàng phụ thuộc tuyến tính của $A$ là các điều kiện thừa và có thể bỏ bớt đi. Do đó ta có thể đưa ra giả thiết này mà không làm mất tính tổng quát.

# Nghiệm cơ sở

Một nghiệm cơ sở của $P$ phải thỏa mãn các điều kiện đẳng thức $Ax = b$, tức là ta đã có $m$ điều kiện active.

## Nghiệm cơ sở

Một nghiệm cơ sở của $P$ phải thỏa mãn các điều kiện đẳng thức $Ax = b$, tức là ta đã có $m$ điều kiện active.

Để có $n$ điều kiện active ta cần có thêm $n - m$ điều kiện $x_i \geq 0$ active, tức là có $n - m$ biến $x_i$ bằng 0.

# Nghiệm cơ sở

Một nghiệm cơ sở của $P$ phải thỏa mãn các điều kiện đẳng thức $Ax = b$, tức là ta đã có $m$ điều kiện active.

Để có $n$ điều kiện active ta cần có thêm $n - m$ điều kiện $x_i \geq 0$ active, tức là có $n - m$ biến $x_i$ bằng 0.

Để có $n$ điều kiện active độc lập tuyến tính thì cách chọn $n - m$ biến trên không phải là hoàn toàn tùy ý theo kết quả dưới đây.

## Nghiệm cơ sở

Một nghiệm cơ sở của $P$ phải thỏa mãn các điều kiện đẳng thức $Ax = b$, tức là ta đã có $m$ điều kiện active.

Để có $n$ điều kiện active ta cần có thêm $n - m$ điều kiện $x_i \geq 0$ active, tức là có $n - m$ biến $x_i$ bằng 0.

Để có $n$ điều kiện active độc lập tuyến tính thì cách chọn $n - m$ biến trên không phải là hoàn toàn tùy ý theo kết quả dưới đây.

**Định lý 4**

*Xét các ràng buộc $Ax = b$ và $x \geq 0$. Giả thiết $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ có các hàng đltt. Một vectơ $x \in \mathbb{R}^n$ là một nghiệm cơ sở khi và chỉ khi $Ax = b$ và tồn tại các chỉ số $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sao cho*

- *Các cột $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}$ độc lập tuyến tính*
- *$x_i = 0$ với mọi $i \notin \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$.*

Chứng minh: Xem CM của Định lí 2.4 trong tài liệu tham khảo.

## Cách xây dựng các nghiệm cơ sở

1. Chọn $m$ cột độc lập tuyến tính $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}$.
2. Cho $x_i = 0$ với mọi $i \notin \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$.
3. Giải hệ phương trình $m$ điều kiện $Ax = b$ với $m$ biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$.

# Cách xây dựng các nghiệm cơ sở

1. Chọn $m$ cột độc lập tuyến tính $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}$.
2. Cho $x_i = 0$ với mọi $i \notin \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$.
3. Giải hệ phương trình $m$ điều kiện $Ax = b$ với $m$ biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$.

Một nghiệm cơ sở nhận được từ thủ tục trên nếu không âm thì là một nghiệm cơ sở CNĐ. Do đó thủ tục trên cũng giúp ta tìm được tất cả các nghiệm cơ sở CNĐ.

## Biến cơ sở

Với $x$ là một nghiệm cơ sở thì các biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ được gọi là các biến cơ sở (basic variables), các biến còn lại được gọi là biến ngoài cơ sở (nonbasic variables).

# Biến cơ sở

Với $x$ là một nghiệm cơ sở thì các biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ được gọi là các biến cơ sở (basic variables), các biến còn lại được gọi là biến ngoài cơ sở (nonbasic variables).

Các cột $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}$ được gọi là các cột cơ sở (basic columns) và do chúng đltt nên tạo thành một hệ cơ sở của $\mathbb{R}^m$.

# Biến cơ sở

Với $x$ là một nghiệm cơ sở thì các biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}$ được gọi là các biến cơ sở (basic variables), các biến còn lại được gọi là biến ngoài cơ sở (nonbasic variables).

Các cột $A_{B_1}, A_{B_2}, \dots, A_{B_m}$ được gọi là các cột cơ sở (basic columns) và do chúng đltt nên tạo thành một hệ cơ sở của $\mathbb{R}^m$.

Bằng cách xếp $m$ cột cơ sở cạnh nhau ta nhận được một ma trận $B$ có kích thước $m \times m$. Ma trận này được gọi là ma trận cơ sở. $B$ là một ma trận khả nghịch.

## Biến cơ sở

Với $x$ là một nghiệm cơ sở thì các biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ được gọi là các biến cơ sở (basic variables), các biến còn lại được gọi là biến ngoài cơ sở (nonbasic variables).

Các cột $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}$ được gọi là các cột cơ sở (basic columns) và do chúng đltt nên tạo thành một hệ cơ sở của $\mathbb{R}^m$.

Bằng cách xếp $m$ cột cơ sở cạnh nhau ta nhận được một ma trận $B$ có kích thước $m \times m$. Ma trận này được gọi là ma trận cơ sở. $B$ là một ma trận khả nghịch.

Ta định nghĩa vectơ $x_B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m})^T$.

## Biến cơ sở

Với $x$ là một nghiệm cơ sở thì các biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ được gọi là các biến cơ sở (basic variables), các biến còn lại được gọi là biến ngoài cơ sở (nonbasic variables).

Các cột $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}$ được gọi là các cột cơ sở (basic columns) và do chúng đltt nên tạo thành một hệ cơ sở của $\mathbb{R}^m$.

Bằng cách xếp $m$ cột cơ sở cạnh nhau ta nhận được một ma trận $B$ có kích thước $m \times m$. Ma trận này được gọi là ma trận cơ sở. $B$ là một ma trận khả nghịch.

Ta định nghĩa vectơ $x_B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m})^T$.

Các biến cơ sở được xác định thông qua việc giải hệ phương trình $Bx_B = b$, hệ này có một nghiệm duy nhất $x_B = B^{-1}b$.

## Biến cơ sở

Với $x$ là một nghiệm cơ sở thì các biến $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ được gọi là các biến cơ sở (basic variables), các biến còn lại được gọi là biến ngoài cơ sở (nonbasic variables).

Các cột $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}$ được gọi là các cột cơ sở (basic columns) và do chúng đltt nên tạo thành một hệ cơ sở của $\mathbb{R}^m$.

Bằng cách xếp $m$ cột cơ sở cạnh nhau ta nhận được một ma trận $B$ có kích thước $m \times m$. Ma trận này được gọi là ma trận cơ sở. $B$ là một ma trận khả nghịch.

Ta định nghĩa vectơ $x_B = (x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m})^T$.

Các biến cơ sở được xác định thông qua việc giải hệ phương trình $Bx_B = b$, hệ này có một nghiệm duy nhất $x_B = B^{-1}b$.

Vectơ $x_N$ được tạo nên từ $n - m$ biến ngoài cơ sở và ta có $x_N = 0$.

## Ví dụ

Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

## Ví dụ

Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Các cột $A_4, A_5, A_6, A_7$ đltt và tạo thành ma trận đơn vị. Nếu ta chọn chúng là các cột cơ sở thì ta sẽ nhận được nghiệm cơ sở $x = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)^T$. Nghiệm này không âm và do đó là một nghiệm cơ sở CNĐ.

## Ví dụ

Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

# Ví dụ

Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ta có 1 cơ sở khác qua việc chọn các cột đltt $A_3$, $A_5$, $A_6$ và $A_7$.

## Ví dụ

Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ta có 1 cơ sở khác qua việc chọn các cột đltt $A_3$, $A_5$, $A_6$ và $A_7$.

Khi đó các biến ngoài cơ sở bằng 0, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, và các biến cơ sở là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

## Ví dụ

Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ta có 1 cơ sở khác qua việc chọn các cột đltt $A_3$, $A_5$, $A_6$ và $A_7$.

Khi đó các biến ngoài cơ sở bằng 0, $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, và các biến cơ sở là nghiệm của hệ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ta được $x = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)^T$, không phải là 1 nghiệm CNĐ.

# Mối quan hệ giữa cơ sở và nghiệm cơ sở

- Các nghiệm cơ sở khác nhau ứng với các cơ sở khác nhau do mỗi cơ sở xác định duy nhất một nghiệm cơ sở

# Mối quan hệ giữa cơ sở và nghiệm cơ sở

- Các nghiệm cơ sở khác nhau ứng với các cơ sở khác nhau do mỗi cơ sở xác định duy nhất một nghiệm cơ sở
- Tuy nhiên hai cơ sở khác nhau có thể có cùng một nghiệm cơ sở.

# Mối quan hệ giữa cơ sở và nghiệm cơ sở

- Các nghiệm cơ sở khác nhau ứng với các cơ sở khác nhau do mỗi cơ sở xác định duy nhất một nghiệm cơ sở
- Tuy nhiên hai cơ sở khác nhau có thể có cùng một nghiệm cơ sở.
  Ví dụ với $b = 0$ thì mọi cơ sở đều ứng với một nghiệm cơ sở duy nhất là vectơ 0. Các ví dụ khác có ở phần tiếp theo về sự suy biến.
  Hiện tượng này có ảnh hưởng quan trọng đến thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

## Cơ sở kề và nghiệm cơ sở kề

**Định nghĩa 11**

*Hai cơ sở khác nhau được gọi là kề nhau (adjacent) nếu chúng chỉ khác nhau một cột cơ sở. Các nghiệm cơ sở nhận được từ hai cơ sở kề nhau được gọi là nghiệm cơ sở kề nhau.*

# Cơ sở kề và nghiệm cơ sở kề

**Định nghĩa 11**

*Hai cơ sở khác nhau được gọi là kề nhau (adjacent) nếu chúng chỉ khác nhau một cột cơ sở. Các nghiệm cơ sở nhận được từ hai cơ sở kề nhau được gọi là nghiệm cơ sở kề nhau.*

**Ví dụ**: Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2 cơ sở $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ và $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ kề nhau. 2 nghiệm cơ sở tương ứng $(0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)^T$ và $(0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)$ là hai nghiệm cơ sở kề nhau.

# Cơ sở kề và nghiệm cơ sở kề

**Định nghĩa 11**

*Hai cơ sở khác nhau được gọi là kề nhau (adjacent) nếu chúng chỉ khác nhau một cột cơ sở. Các nghiệm cơ sở nhận được từ hai cơ sở kề nhau được gọi là nghiệm cơ sở kề nhau.*

**Ví dụ**: Xét ràng buộc $Ax = b$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2 cơ sở $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ và $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ kề nhau. 2 nghiệm cơ sở tương ứng $(0, 0, 0, 8, 12, 4, 6)^T$ và $(0, 0, 4, 0, -12, 4, 6)$ là hai nghiệm cơ sở kề nhau.

**Lưu ý**: Nghiệm cơ sở của 2 cơ sở kề có thể giống nhau (suy biến).

# Về giả thiết ma trận $A$ có hạng cực đại theo số hàng

Ta có thể giả thiết ma trận $A$ có hạng cực đại theo số hàng mà không làm mất tính tổng quát.

**Định lý 5**

*Cho* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$ *là một đa diện khác rỗng với* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Giả sử* $\operatorname{rank}(A) = k < m$ *với các hàng* $A_{i_1\cdot}, A_{i_2\cdot}, \ldots, A_{i_k\cdot}$ *độc lập tuyến tính. Đa diện* $Q$ *được cho bởi*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, A_{i_1\cdot}x = b_{i_1}, A_{i_2\cdot}x = b_{i_2}, \ldots, A_{i_k\cdot}x = b_{i_k}, x \geq 0\}.$$

*Ta có* $Q = P$.

## Về giả thiết ma trận $A$ có hạng cực đại theo số hàng

Ta có thể giả thiết ma trận $A$ có hạng cực đại theo số hàng mà không làm mất tính tổng quát.

**Định lý 5**

*Cho* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$ *là một đa diện khác rỗng với* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Giả sử* $\mathrm{rank}(A) = k < m$ *với các hàng* $A_{i_1\cdot}, A_{i_2\cdot}, \ldots, A_{i_k\cdot}$ *độc lập tuyến tính. Đa diện* $Q$ *được cho bởi*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, A_{i_1\cdot}x = b_{i_1}, A_{i_2\cdot}x = b_{i_2}, \ldots, A_{i_k\cdot}x = b_{i_k}, x \geq 0\}.$$

*Ta có* $Q = P$.

**Kết luận**: Nếu miền CNĐ khác rỗng, một bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chính tắc có thể đưa về bài toán ở dạng chính tắc tương đương trong đó các điều kiện đẳng thức độc lập tuyến tính.

## Ví dụ

Xét đa diện khác rỗng cho bởi các điều kiện

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

Ma trận có hạng 2. Hàng thứ nhất là tổng của hai hàng còn lại. Do đó điều kiện thứ nhất là thừa và có thể bỏ đi.

# Sự suy biến

# Sự suy biến

Nhắc lại: Tại một nghiệm cơ sở $x \in \mathbb{R}^n$ ta có $n$ điều kiện độc lập tuyến tính active.

**Định nghĩa 12**

*Một nghiệm cơ sở $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là suy biến (degenerate) nếu có hơn n điều kiện ràng buộc active tại $x$.*

# Sự suy biến – Ví dụ

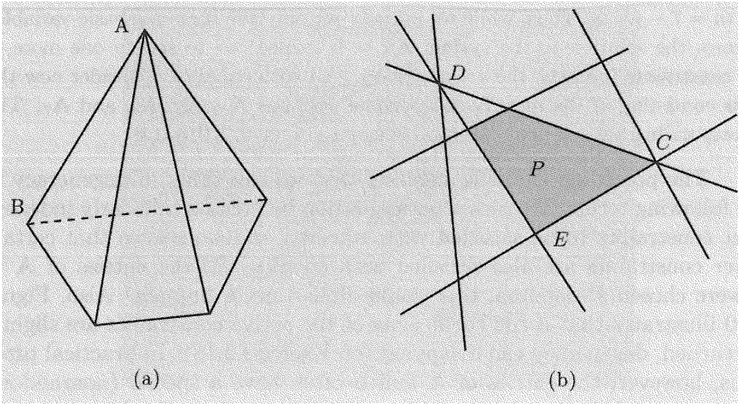
Xét đa diện

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & & x_2 & + & 6x_3 & \leq & 12 \\
x_1 & & & & & \leq & 4 \\
 & & x_2 & & & \leq & 6 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Vectơ $(2, 6, 0)^T$ là một nghiệm cơ sở không suy biến (nondegenerate) vì có đúng 3 điều kiện active và chúng đltt.

Trong khi đó vectơ $(4, 0, 2)$ là một nghiệm cơ sở suy biến, tại đó có 4 điều kiện active và 3 trong số đó đltt.

# Sự suy biến – Ví dụ




- $A$ và $C$ là các nghiệm cơ sở CNĐ suy biến
- $B$ và $E$ là các nghiệm cơ sở CNĐ không suy biến
- $D$ là nghiệm cơ sở suy biến (không CNĐ).

## Sự suy biến với đa diện ở dạng chính tắc

**Định nghĩa 13**

*Xét đa diện ở dạng chính tắc* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ *và một nghiệm cơ sở* $x$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Vectơ* $x$ *được gọi là một nghiệm cơ sở suy biến nếu có hơn* $n - m$ *tọa độ của* $x$ *bằng 0.*

**Lưu ý**: Một nghiệm cơ sở luôn có ít nhất $n - m$ tọa độ (ngoài cơ sở) bằng 0.

# Sự suy biến – Ví dụ

Xét đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$[1] với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

[1] Đây chính là đa diện ở 3 slide trước có thêm biến bù để đưa về dạng chính tắc

# Sự suy biến – Ví dụ

Xét đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$[1] với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Xét cơ sở $\{A_1, A_2, A_3, A_7\}$, ta nhận được một nghiệm cơ sở CNĐ suy biến $(4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)^T$.

[1] Đây chính là đa diện ở 3 slide trước có thêm biến bù để đưa về dạng chính tắc

# Sự suy biến – Ví dụ

Xét đa diện $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$[1] với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Xét cơ sở $\{A_1, A_2, A_3, A_7\}$, ta nhận được một nghiệm cơ sở CNĐ suy biến $(4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)^T$.

Xét cơ sở $\{A_1, A_3, A_4, A_7\}$, ta cũng nhận được nghiệm cơ sở CNĐ suy biến $(4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)^T$ giống như trên.

[1] Đây chính là đa diện ở 3 slide trước có thêm biến bù để đưa về dạng chính tắc

# Sự suy biến không chỉ hoàn toàn là tính chất hình học

Trong trường hợp tổng quát, sự suy biến của một nghiệm cơ sở CNĐ không chỉ là một tính chất hình học (không phụ thuộc vào cách biểu diễn) mà thực tế nó có thể phụ thuộc vào biểu diễn cụ thể của đa diện.

## Sự suy biến không chỉ hoàn toàn là tính chất hình học

Xét đa diện

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, x \geq 0\}.$$

Ta có $n = 3$, $m = 2$, $n - m = 1$. Vectơ $(1, 1, 0)^T$ không suy biến.
Vectơ $(0, 0, 1)^T$ suy biến.

2

# Sự suy biến không chỉ hoàn toàn là tính chất hình học

Xét đa diện

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, x \geq 0\}.$$

Ta có $n = 3$, $m = 2$, $n - m = 1$. Vectơ $(1, 1, 0)^T$ không suy biến. Vectơ $(0, 0, 1)^T$ suy biến.

Tuy nhiên cũng chính đa diện này có thể biểu diễn dưới dạng[2]

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, x_1, x_3 \geq 0\}.$$

Khi đó $(0, 0, 1)^T$ lại là một nghiệm cơ sở CNĐ không suy biến do chỉ có 3 điều kiện active.

[2] Bỏ đi điều kiện $x_2 \geq 0$

# Sự suy biến không chỉ hoàn toàn là tính chất hình học

Một ví dụ khác, xét một nghiệm cơ sở CNĐ không suy biến $x^*$ của một đa diện $P$ ở dạng chính tắc $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Có đúng $n - m$ tọa độ của $x^*$ bằng 0 và $Ax^* = b$.

# Sự suy biến không chỉ hoàn toàn là tính chất hình học

Một ví dụ khác, xét một nghiệm cơ sở CNĐ không suy biến $x^*$ của một đa diện $P$ ở dạng chính tắc $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Có đúng $n - m$ tọa độ của $x^*$ bằng 0 và $Ax^* = b$.

Nếu ta biểu diễn $P$ dưới dạng $P = \{x \mid Ax \geq b, -Ax \geq -b, x \geq 0\}$ thì tại $x^*$ ta có $n - m$ tọa độ bằng 0 và có thêm $2m$ bất đẳng thức xảy ra dấu bằng, tức là có $n + m$ điều kiện active. Do đó ở dạng biểu diễn này, $x^*$ lại suy biến.

## Sự suy biến – Lưu ý

- Một nghiệm cơ sở CNĐ có thể suy biến ở dưới dạng biểu diễn này nhưng lại không suy biến ở một dạng biểu diễn khác của đa diện.

## Sự suy biến – Lưu ý

- Một nghiệm cơ sở CNĐ có thể suy biến ở dưới dạng biểu diễn này nhưng lại không suy biến ở một dạng biểu diễn khác của đa diện.
- Một nghiệm cơ sở CNĐ suy biến ở một dạng biểu diễn chính tắc này cũng suy biến ở một dạng biểu diễn chính tắc khác của đa diện (bài tập 2.19 của tài liệu tham khảo).[3]

[3] Ví dụ có thể cộng các điều kiện đẳng thức với nhau để ra một biểu diễn khác

# Sự tồn tại của điểm cực

# Sự tồn tại của điểm cực

- Không phải đa diện nào cũng có điểm cực. Ví dụ nửa không gian hay siêu phẳng.
- Chúng ta sẽ xây dựng điều kiện cần và đủ để đa diện có ít nhất một điểm cực.

# Sự tồn tại của điểm cực

- Không phải đa diện nào cũng có điểm cực. Ví dụ nửa không gian hay siêu phẳng.
- Chúng ta sẽ xây dựng điều kiện cần và đủ để đa diện có ít nhất một điểm cực.

**Định nghĩa 14**

*Một đa diện* $P \subset \mathbb{R}^n$ *được gọi là chứa đường thẳng nếu tồn tại vectơ* $x \in P$ *và* $d \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *sao cho* $x + \lambda d \in P$ *với mọi* $\lambda \in \mathbb{R}$.

# Sự tồn tại của điểm cực

**Định lý 6**

*Xét đa diện khác rỗng* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$*. Các khẳng định sau đây là tương đương*

1. $P$ *có ít nhất một điểm cực.*
2. $P$ *không chứa đường thẳng.*
3. *Tồn tại* $n$ *hàng của* $A$ *độc lập tuyến tính.*

**Chứng minh**: Xem CM Định lý 2.6 trong tài liệu tham khảo.

# Sự tồn tại của điểm cực

**Định lý 6**

*Xét đa diện khác rỗng* $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$. *Các khẳng định sau đây là tương đương*

1. $P$ *có ít nhất một điểm cực.*
2. $P$ *không chứa đường thẳng.*
3. *Tồn tại n hàng của A độc lập tuyến tính.*

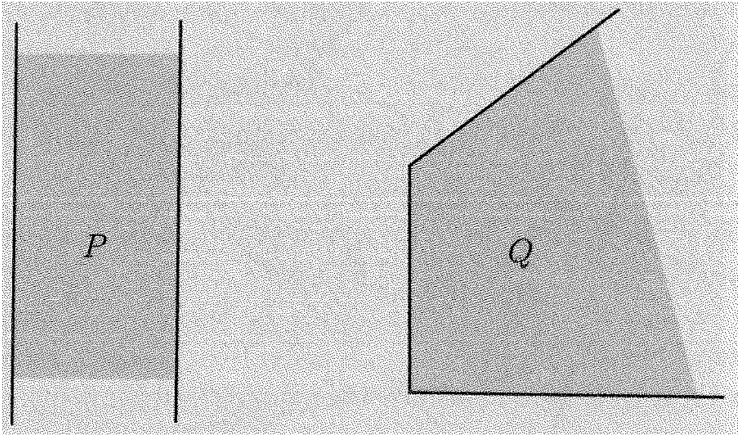
**Chứng minh**: Xem CM Định lý 2.6 trong tài liệu tham khảo.

**Hệ quả 1**

*Mọi đa diện khác rỗng bị chặn và mọi đa diện khác rỗng ở dạng chính tắc có ít nhất một nghiệm cơ sở CNĐ.*

**Chứng minh**: Hệ quả từ Định lý 3 và Định lý 6.

# Sự tồn tại của điểm cực




- $P$ chứa đường thẳng và không có điểm cực
- $Q$ không chứa đường thẳng và có điểm cực

# Tính tối ưu của điểm cực

# Tính tối ưu của điểm cực

**Định lý 7**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực và có nghiệm tối ưu, thì tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

## Tính tối ưu của điểm cực

**Định lý 7**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực và có nghiệm tối ưu, thì tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

**Chứng minh.**

Xem CM của Định lý 2.7 trong tài liệu tham khảo.

- Xét $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$. Giả sử $v$ là giá trị tối ưu.

$\square$

# Tính tối ưu của điểm cực

**Định lý 7**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực và có nghiệm tối ưu, thì tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

**Chứng minh.**

Xem CM của Định lý 2.7 trong tài liệu tham khảo.

- Xét $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \geq b\}$. Giả sử $v$ là giá trị tối ưu.
- Xét $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \geq b, c^T x = v\}$. $Q$ cũng là một đa diện.

$\square$

## Tính tối ưu của điểm cực

**Định lý 7**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực và có nghiệm tối ưu, thì tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

**Chứng minh.**

Xem CM của Định lý 2.7 trong tài liệu tham khảo.

- Xét $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$. Giả sử $v$ là giá trị tối ưu.
- Xét $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, c^T x = v\}$. $Q$ cũng là một đa diện.
- $P$ có điểm cực trị nên $P$ không chứa đường thẳng. Vì $Q \subset P$ nên $Q$ không chứa đường thẳng và do đó có điểm cực trị.

$\square$

# Tính tối ưu của điểm cực

**Định lý 7**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực và có nghiệm tối ưu, thì tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

**Chứng minh.**

Xem CM của Định lý 2.7 trong tài liệu tham khảo.

- Xét $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \geq b\}$. Giả sử $v$ là giá trị tối ưu.
- Xét $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \geq b, c^T x = v\}$. $Q$ cũng là một đa diện.
- $P$ có điểm cực trị nên $P$ không chứa đường thẳng. Vì $Q \subset P$ nên $Q$ không chứa đường thẳng và do đó có điểm cực trị.
- Chỉ cần chứng minh điểm cực trị của $Q$ cũng là điểm cực trị của $P$ là định lý được chứng minh. $\square$

# Tính tối ưu của điểm cực

**Định lý 8**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực, thì hoặc bài toán không bị chặn (tiến đến $-\infty$) hoặc tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

**Chứng minh**: Xem CM của Định lý 2.8 trong tài liệu tham khảo.

## Tính tối ưu của điểm cực

**Định lý 8**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực, thì hoặc bài toán không bị chặn (tiến đến $-\infty$) hoặc tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

**Chứng minh**: Xem CM của Định lý 2.8 trong tài liệu tham khảo.

**Hệ quả 2**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$ khác rỗng. Ta có hoặc bài toán không bị chặn (tiến đến $-\infty$) hoặc tồn tại một nghiệm tối ưu.*

**Định lý 8**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$. Nếu $P$ có ít nhất một điểm cực, thì hoặc bài toán không bị chặn (tiến đến $-\infty$) hoặc tồn tại một nghiệm tối ưu cũng là một điểm cực của $P$.*

**Chứng minh**: Xem CM của Định lý 2.8 trong tài liệu tham khảo.

**Hệ quả 2**

*Xét bài toán QHTT cực tiểu hóa hàm mục tiêu $c^T x$ trên một đa diện $P$ khác rỗng. Ta có hoặc bài toán không bị chặn (tiến đến $-\infty$) hoặc tồn tại một nghiệm tối ưu.*

**Chứng minh**: Đưa đa diện về dạng chính tắc và áp dụng Định lý 8.

## Nhận xét

Hệ quả 2 cho thấy một bài toán QHTT rơi vào một trong ba trường hợp

- Không có nghiệm CNĐ
- Không bị chặn
- Có nghiệm tối ưu.

## Nhận xét

Hệ quả 2 cho thấy một bài toán QHTT rơi vào một trong ba trường hợp

- Không có nghiệm CNĐ
- Không bị chặn
- Có nghiệm tối ưu.

Điều này không đúng với bài toán quy hoạch phi tuyến tổng quát. Ví dụ bài toán quy hoạch

$$\min_{x \geq 1} \frac{1}{x}$$

có nghiệm CNĐ và bị chặn (bởi 0) nhưng không có nghiệm tối ưu.

# Tài liệu tham khảo

Chương 2, D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, and J. Tsitsiklis (1997), Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific.