Quy hoạch tuyến tính

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Bài toán quy hoạch tuyến tính

Quy hoạch tuyến tính (linear programming - LP) là gì?

Một bài toán *quy hoạch tuyến tính* là một bài toán tối ưu có hữu hạn biến, hàm mục tiêu tuyến tính và miền chấp nhận được được định nghĩa bởi hữu hạn các đẳng thức hay bất đẳng thức tuyến tính.

Quy hoạch tuyến tính (linear programming - LP) là gì?

- Hàm số tuyến tính của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

với hằng số $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Quy hoạch tuyến tính (linear programming - LP) là gì?

- Hàm số tuyến tính của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

  với hằng số $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.
- Một điều kiện đẳng thức tuyến tính có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \alpha$$

  với $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Quy hoạch tuyến tính (linear programming - LP) là gì?

- Hàm số tuyến tính của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

  với hằng số $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.
- Một điều kiện đẳng thức tuyến tính có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \alpha$$

  với $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
- Một điều kiện bất đẳng thức tuyến tính có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq \alpha,$$

  hoặc

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq \alpha$$

  với $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Bài toán quy hoạch tuyến tính

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, s \\
& b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, r.
\end{array}
$$

Bất đẳng thức vectơ: So sánh theo phần tử

Cho $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Ta viết $x \leq y$ khi và chỉ khi

$$x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Biểu diễn dạng ma trận

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = c^T x$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Biểu diễn dạng ma trận

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq \alpha_i, \; i = 1, \ldots, s$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Ax \leq a$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$$

Biểu diễn dạng ma trận

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n = \beta_i, \; i = 1, \ldots, r$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Bx = b$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính: biểu diễn dạng ma trận

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c^T x \\
\text{subject to} \quad & Ax \leq a \\
& Bx = b
\end{aligned}
$$

$$
c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix},
$$

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}.
$$

Ứng dụng của quy hoạch tuyến tính

A very short list:

- resource allocation
- production scheduling
- warehousing
- layout design
- transportation scheduling
- facility location
- supply chain management
- Model selection
- Machine Learning
- Compressed sensing
- flight crew scheduling
- portfolio optimization
- cash flow matching
- currency exchange arbitrage
- crop scheduling
- diet balancing
- parameter estimation
- ...

Mô hình hóa dưới dạng LP

Ví dụ: xưởng sản xuất cốc nhựa

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là $25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là $20.

Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds.

Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Hãy mô hình hóa vấn đề dưới dạng một bài toán quy hoạch tuyến tính.

Mô hình hóa

4 bước chính

1. Xác định các *biến quyết định (decision variables)*.
2. Xác định mục tiêu và sử dụng các biến để biểu diễn *hàm mục tiêu (objective function)* dưới dạng hàm tuyến tính của các biến.
3. Xác định các *điều kiện ràng buộc hiển (explicit constraints)* và biểu diễn dưới dạng đẳng thức/bất đẳng thức tuyến tính của các biến.
4. Xác định các *điều kiện ràng buộc ẩn (implicit constraints)* và biểu diễn dưới dạng đẳng thức/bất đẳng thức tuyến tính của các biến.

Biến quyết định

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là $25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là $20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Biến quyết định

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là $25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là $20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Ta có 2 biến

$$B = \text{số hộp cốc bia sản xuất mỗi ngày}$$

$$C = \text{số hộp ly sâm banh sản xuất mỗi ngày.}$$

Hàm mục tiêu

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là $25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là $20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Hàm mục tiêu

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là $25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là $20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Tối đa hóa lợi nhuận.

$$\text{Lợi nhuận} = 25B + 20C$$

Điều kiện ràng buộc hiển

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là \$25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là \$20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Điều kiện ràng buộc hiển

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là \$25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là \$20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Nguồn cung hạt nhựa: $20B + 12C \leq 1800$

Điều kiện ràng buộc hiển

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là \$25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là \$20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Nguồn cung hạt nhựa: $20B + 12C \leq 1800$

Thời gian làm việc: $B/15 + C/15 \leq 8$

Điều kiện ràng buộc ẩn

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là \$25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là \$20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Điều kiện ràng buộc ẩn

Một công ty gia đình sản xuất cốc nhựa muốn tối ưu hóa mặt hàng sản xuất để có lợi nhuận tối đa. Họ sản xuất cốc bia và ly rượu sâm banh. Lợi nhuận của một hộp cốc bia là \$25 trong khi lợi nhuận của một hộp ly rượu sâm banh là \$20. Để sản xuất mỗi hộp cốc bia cần 20 pounds hạt nhựa, trong khi một hộp ly rượu sâm banh cần 12 pounds hạt nhựa. Nguồn cung hạt nhựa hàng ngày tối đa là 1800 pounds. Máy có thể sản xuất 15 hộp sản phẩm mỗi giờ và tổng thời gian làm việc mỗi ngày là 8 tiếng.

Các biến quyết định không âm: $B \geq 0, C \geq C$

Mô hình LP của bài toán xưởng sản xuất cốc nhựa

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximize} & 25B & + & 20C & & \\
\text{subject to} & 20B & + & 12C & \leq & 1800 \\
 & \frac{1}{15}B & + & \frac{1}{15}C & \leq & 8 \\
 & & B, C \geq 0. & & &
\end{array}
$$

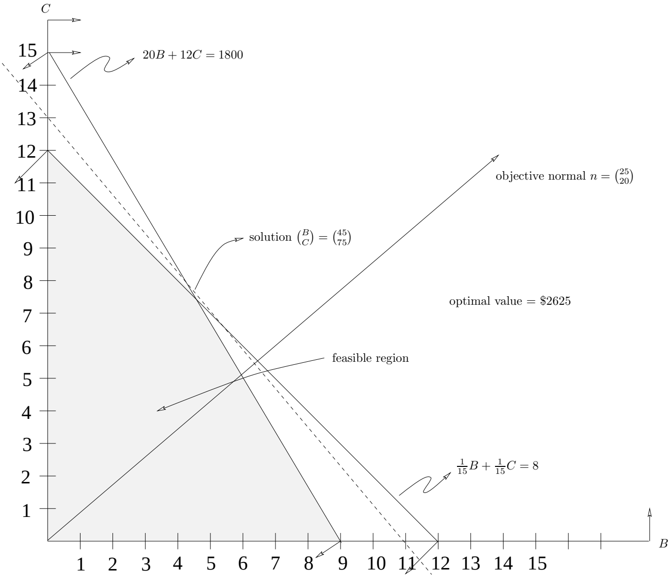
Giải bài toán LP 2 biến bằng hình học

Giải bài toán LP 2 biến bằng hình học

Xét mô hình LP của bài toán xưởng sản xuất cốc nhựa

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize} & 25B & + & 20C & & \\ \text{subject to} & 20B & + & 12C & \leq & 1800 \\ & \frac{1}{15}B & + & \frac{1}{15}C & \leq & 8 \\ & & B, C \geq 0. & & & \end{array}$$

Giải bài toán LP 2 biến bằng hình học



Giải bài toán LP 2 biến bằng hình học

Bước 1: Vẽ các điều kiện ràng buộc và xác định miền chấp nhận được.

Bước 2: Vẽ vectơ pháp tuyến của hàm mục tiêu.

Bước 3: Đặt thước kẻ vuông góc và di chuyển theo hướng vectơ pháp tuyến trong trường hợp tối đa hóa (hoặc ngược chiều trong trường hợp tối thiểu hóa) đến điểm cuối cùng mà thước kẻ còn cắt miền chấp nhận được.

Bước 4: Tập điểm cắt giữa thước kẻ và miền chấp nhật được là tập nghiệm tối ưu.

Thuật toán giải bài toán LP

Các loại thuật toán

- Thuật toán đơn hình (simplex algorithm) và các biến thể
- Thuật toán ellipsoid (ellipsoid method)
- Thuật toán điểm trong (interior point method)

Thuật toán đầu tiên có độ phức tạp tính toán mũ. Hai thuật toán còn lại có độ phức tạp tính toán đa thức (polynomial time).

Một vài phần mềm

Thương mại

- Cplex
- Gurobi
- Xpress

Các phần mềm miễn phí

- Clp (Coin-OR)
- Google-Glop
- Scip/Soplex

Sự cải tiến của thuật toán LP

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

Sự cải tiến của thuật toán LP

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày

Sự cải tiến của thuật toán LP

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày
- CPLEX 5.0 (1997) 1.5 giờ

Sự cải tiến của thuật toán LP

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày
- CPLEX 5.0 (1997) 1.5 giờ
- CPLEX 8.0 (2002) 86.7 giây

Sự cải tiến của thuật toán LP

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày
- CPLEX 5.0 (1997) 1.5 giờ
- CPLEX 8.0 (2002) 86.7 giây
- CPLEX 2003 59.1 giây

Tăng tốc 43500x

Sự cải tiến của thuật toán LP: 1988-2002

- Tăng tốc của thuật toán (trung bình) **3300x**

Sự cải tiến của thuật toán LP: 1988-2002

- Tăng tốc của thuật toán (trung bình) **3300x**
- Tăng tốc của máy tính **1600x**

.

Sự cải tiến của thuật toán LP: 1988-2002

Tăng tốc của thuật toán (trung bình)	**3300x**
Tăng tốc của máy tính	**1600x**
Kết hợp	**5,280,000x**

Sự cải tiến của thuật toán LP: 1988-2002

- Tăng tốc của thuật toán (trung bình) **3300x**
- Tăng tốc của máy tính **1600x**
- Kết hợp **5,280,000x**

Điều đó có nghĩa là vào năm 1988 (sử dụng phần mềm và máy tính năm 1988) cần **2 tháng** để giải thì đến năm 2002 chỉ cần **1 giây**.

Dạng chính tắc

LP dạng chính tắc (standard form)

Bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng sau được gọi là *dạng chính tắc*

$$
\begin{array}{lll}
\max & c^T x & \text{là bài toán tối đa hóa} \\
\text{s.t.} & Ax = b & \text{chỉ có điều kiện đẳng thức} \\
 & x \geq 0 & \text{và các biến đều không âm.}
\end{array}
$$

LP dạng chính tắc (standard form)

Bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng sau được gọi là *dạng chính tắc*

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x & \text{là bài toán tối đa hóa} \\ \text{s.t.} & Ax = b & \text{chỉ có điều kiện đẳng thức} \\ & x \geq 0 & \text{và các biến đều không âm.} \end{array}$$

Ta quan tâm đến dạng chính tắc vì thuật toán đơn hình sẽ học áp dụng cho bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng này.

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- $\underline{min \rightarrow max}$:

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *min → max*: Để chuyển một bài tối thiểu hóa về tối đa hóa ta chỉ cần nhân hàm mục tiêu với -1.

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *min → max*: Để chuyển một bài tối thiểu hóa về tối đa hóa ta chỉ cần nhân hàm mục tiêu với -1.
- *bất đẳng thức → đẳng thức*: Nếu LP có bất đẳng thức ở dạng
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *min → max*: Để chuyển một bài tối thiểu hóa về tối đa hóa ta chỉ cần nhân hàm mục tiêu với -1.
- *bất đẳng thức → đẳng thức*: Nếu LP có bất đẳng thức ở dạng

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

thì ta có thể biến nó thành đẳng thức bằng cách tạo một *biến bù* $s_i \geq 0$ và biến đổi ràng buộc trên thành

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i.$$

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *min $\rightarrow$ max*: Để chuyển một bài tối thiểu hóa về tối đa hóa ta chỉ cần nhân hàm mục tiêu với -1.
- *bất đẳng thức $\rightarrow$ đẳng thức*: Nếu LP có bất đẳng thức ở dạng

  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

  thì ta có thể biến nó thành đẳng thức bằng cách tạo một *biến bù* $s_i \geq 0$ và biến đổi ràng buộc trên thành

  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i.$$

  Nếu LP có bất đẳng thức ở dạng

  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *min → max*: Để chuyển một bài tối thiểu hóa về tối đa hóa ta chỉ cần nhân hàm mục tiêu với -1.
- *bất đẳng thức → đẳng thức*: Nếu LP có bất đẳng thức ở dạng

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

thì ta có thể biến nó thành đẳng thức bằng cách tạo một *biến bù* $s_i \geq 0$ và biến đổi ràng buộc trên thành

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i.$$

Nếu LP có bất đẳng thức ở dạng

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

thì ta có thể biến nó thành đẳng thức bằng cách tạo một *biến bù* $s_i \geq 0$ và biến đổi ràng buộc trên thành

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - s_i = b_i.$$

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *Biến có cận dưới khác 0, $x_i \geq l_i$*: Có thể đổi biến $x_i' = x_i - l_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$.

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *Biến có cận dưới khác 0*, $x_i \geq l_i$: Có thể đổi biến $x_i' = x_i - l_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$.
- *Biến có cận trên*, $x_i \leq u_i$: Có thể đổi biến $x_i' = u_i - x_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$.

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *Biến có cận dưới khác 0, $x_i \geq l_i$*: Có thể đổi biến $x_i' = x_i - l_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$.
- *Biến có cận trên, $x_i \leq u_i$*: Có thể đổi biến $x_i' = u_i - x_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$.
- *Biến thuộc đoạn, $l_i \leq x_i \leq u_i$*: Có thể đổi biến $x_i' = x_i - l_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$ và viết điều kiện $x_i \leq u_i$ thành $x_i' \leq u_i - l_i$. Bất đẳng thức này được thêm biến bù không âm để trở thành đẳng thức.

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *Biến có cận dưới khác 0, $x_i \geq l_i$*: Có thể đổi biến $x_i' = x_i - l_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$.
- *Biến có cận trên, $x_i \leq u_i$*: Có thể đổi biến $x_i' = u_i - x_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$.
- *Biến thuộc đoạn, $l_i \leq x_i \leq u_i$*: Có thể đổi biến $x_i' = x_i - l_i$ với biến không âm $x_i' \geq 0$ và viết điều kiện $x_i \leq u_i$ thành $x_i' \leq u_i - l_i$. Bất đẳng thức này được thêm biến bù không âm để trở thành đẳng thức.

Lưu ý: Ta hoàn toàn có thể coi các điều kiện cận trên cận dưới là các bất đẳng thức và đưa về đẳng thức bằng cách thêm biến bù. Tuy nhiên như vậy có thể ta sẽ cần nhiều biến (bù) hơn.

Mọi bài toán LP có thể chuyển về dạng chính tắc

- *Biến tự do*: Đôi khi các biến không có cận trên hay cận dưới (nhưng vẫn xuất hiện trong điều kiện với các biến khác). Khi đó ta gọi là *biến tự do*. Để đưa về dạng chính tắc ta phải thay thế biến tự do x_i bằng hai biến không âm x_i^+, x_i^- qua công thức $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

Đưa về dạng chính tắc

Hãy chuyển LP sau về dạng chính tắc

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{minimize} & 3x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
\text{subject to} & -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & 3 \\
 & & & 7x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & \leq & 2
\end{array}
$$

$$x_2 \geq -1,\ x_3 \leq 5,\ -2 \leq x_4 \leq 2.$$

Phải là bài toán tối đa hóa

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimize} & 3x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
\text{subject to} & -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & 3 \\
 & & & 7x_2 & & & + & x_4 & = & 5 \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & \leq & 2
\end{array}
$$

$$x_2 \geq -1,\; x_3 \leq 5,\; -2 \leq x_4 \leq 2.$$

Minimization $\longrightarrow$ maximization

$$\text{maximize} - 3x_1 + x_2.$$

Chuyển các bđt thành đẳng thức

$$-x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \geq 3$$

trở thành

$$-x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 - s_1 = 3$$

và

$$x_3 + x_4 \leq 2$$

trở thành

$$x_3 + x_4 + s_2 = 2$$

với các biến bù $s_1, s_2 \geq 0$.

Biến thuộc đoạn

Điều kiện $-2 \leq x_4 \leq 2$ sẽ được tách thành $x_4 \geq -2$ và $x_4 \leq 2$, trong đó điều kiện $x_4 \leq 2$ được chuyển thành đẳng thức

$$x_4 + s_3 = 2$$

với biến bù $s_3 \geq 0$.

Biến thuộc đoạn

Điều kiện $-2 \leq x_4 \leq 2$ sẽ được tách thành $x_4 \geq -2$ và $x_4 \leq 2$, trong đó điều kiện $x_4 \leq 2$ được chuyển thành đẳng thức

$$x_4 + s_3 = 2$$

với biến bù $s_3 \geq 0$.

Kết hợp lại ta có

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & -3x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & s_1 & & & & & = & 3 \\
& & & 7x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & = & 5 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & & & + & s_2 & & & = & 2 \\
& & & & & & & x_4 & & & & & + & s_3 & = & 2
\end{array}$$

$$-1 \leq x_2,\ x_3 \leq 5,\ -2 \leq x_4$$

$$s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Đổi biến

Biến x_1 tự do nên được thay thế bằng

$$x_1 = y_1^+ - y_1^- \text{ với } y_1^+ \geq 0, y_1^- \geq 0.$$

x_2 có cận dưới khác 0 ($x_2 \geq -1$) nên ta thay thế nó bằng

$$y_2 = x_2 + 1 \quad \text{hay} \quad x_2 = y_2 - 1 \quad \text{với} \quad y_2 \geq 0.$$

x_3 bị chặn trên ($x_3 \leq 5$) nên được thay thế bằng

$$y_3 = 5 - x_3 \quad \text{hay} \quad x_3 = 5 - y_3 \quad \text{với} \quad y_3 \geq 0.$$

x_4 bị chặn dưới ($-2 \leq x_4$) nên được thay bằng

$$y_4 = x_4 + 2 \quad \text{hay} \quad x_4 = y_4 - 2 \quad \text{với} \quad y_4 \geq 0.$$

Đổi biến

Thế $x_1 = y_1^+ - y_1^-$ vào

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & -3x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & s_1 & & & & & = & 3 \\
 & & & 7x_2 & & & + & x_4 & & & & & & & = & 5 \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & & & + & s_2 & & & = & 2 \\
 & & & & & & & x_4 & & & & & + & s_3 & = & 2
\end{array}
$$

$$-1 \le x_2,\ x_3 \le 5,\ -2 \le x_4$$

$$s_1, s_2, s_3 \ge 0.$$

nhận được

Đổi biến

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\max & -3y_1^+ & +3y_1^- & +x_2 & & & & & & \\
\text{s.t.} & -y_1^+ & +y_1^- & +6x_2 & -x_3 & +x_4 & -s_1 & & & = 3 \\
& & & 7x_2 & & +x_4 & & & & = 5 \\
& & & & x_3 & +x_4 & & +s_2 & & = 2 \\
& & & & & x_4 & & & +s_3 & = 2
\end{array}
$$

$$-1 \leq x_2,\ x_3 \leq 5,\ -2 \leq x_4$$

$$y_1^+, y_1^-, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Tiếp tục thế $x_2 = y_2 - 1$ nhận được

Đổi biến

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
\max & -3y_1^+ & +3y_1^- & +y_2 & -1 & & & & & \\
\text{s.t.} & -y_1^+ & +y_1^- & +6y_2 & -x_3 & +x_4 & -s_1 & & & = 9 \\
 & & & 7y_2 & & +x_4 & & & & = 12 \\
 & & & & x_3 & +x_4 & & +s_2 & & = 2 \\
 & & & & & x_4 & & & +s_3 & = 2
\end{array}
$$

$$x_3 \leq 5, \ -2 \leq x_4$$

$$y_1^+, y_1^-, y_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Tiếp tục thế $x_3 = 5 - y_3$ nhận được

Đổi biến

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
\max & -3y_1^+ & +3y_1^- & +y_2 & -1 & & & & & \\
\text{s.t.} & -y_1^+ & +y_1^- & +6y_2 & +y_3 & +x_4 & -s_1 & & & = 14 \\
 & & & 7y_2 & & +x_4 & & & & = 12 \\
 & & & & -y_3 & +x_4 & & +s_2 & & = -3 \\
 & & & & & x_4 & & & +s_3 & = 2
\end{array}
$$

$$-2 \leq x_4$$

$$y_1^+, y_1^-, y_2, y_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

Tiếp tục thế $x_4 = y_4 - 2$ nhận được

Đổi biến

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\max & -3y_1^+ & +3y_1^- & +y_2 & -1 & & & & & \\
\text{s.t.} & -y_1^+ & +y_1^- & +6y_2 & +y_3 & +y_4 & -s_1 & & & = 16 \\
 & & & 7y_2 & & +y_4 & & & & = 14 \\
 & & & & -y_3 & +y_4 & & +s_2 & & = -1 \\
 & & & & & y_4 & & & +s_3 & = 4 \\
\end{array}
$$

$$y_1^+, y_1^-, y_2, y_3, y_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$$

LP dạng chính tắc

Bài toán trên tương đương với

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
\max & -3y_1^+ & +3y_1^- & +y_2 & & & & & & \\
\text{s.t.} & -y_1^+ & +y_1^- & +6y_2 & +y_3 & +y_4 & -s_1 & & & = 16 \\
& & & 7y_2 & & +y_4 & & & & = 14 \\
& & & & -y_3 & +y_4 & & +s_2 & & = -1 \\
& & & & & y_4 & & & +s_3 & = 4
\end{array}$$

$$y_1^+, y_1^-, y_2, y_3, y_4, s_1, s_2, s_3 \geq 0,$$

đây chính là dạng chính tắc.

LP dạng chuẩn tắc

Bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng sau được gọi là *dạng chuẩn tắc*

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x & \text{là bài toán tối đa hóa} \\ \text{s.t.} & Ax \leq b & \text{điều kiện } \leq \\ & x \geq 0 & \text{và các biến đều không âm.} \end{array}$$