Bài toán tối ưu

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Nội dung

1. Bài toán tối ưu và phân loại
2. Cực trị địa phương và toàn cục
3. Các ví dụ

Tài liệu tham khảo

Nội dung chính

- Chương 1 và 4, *S. Boyd and L. Vandenberghe (2004), Convex Optimization*.
- Chương 1, *J. Nocedal and S. J. Wright (1999), Numerical Optimization*.

Đọc thêm

- Chương 2 và 3, *S. Boyd and L. Vandenberghe (2004), Convex Optimization*.

Bài toán tối ưu và phân loại

Bài toán tối ưu

Bài toán tối ưu hóa (optimization problem) là bài toán ở đó ta phải cực tiểu hay cực đại hóa một hàm số trên một tập cho trước.

- Hàm số cực tiểu hay cực đại hóa gọi là hàm mục tiêu (objective function).
- Tập hợp cho trước gọi là miền chấp nhận được (feasible region).

Bài toán tối ưu

$$\begin{array}{ll} \min_{x} & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X}. \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \max_{x} & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{X}. \end{array}$$

- *Biến* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- *Hàm mục tiêu* f
- *Điều kiện ràng buộc* $x \in \mathcal{X}$ *(tập nghiệm chấp nhận được* $\mathcal{X}$*).*
  $\mathcal{X}$ thường không được cho dưới dạng tập hợp xác định bởi các đẳng thức và bất đẳng thức.

Bài toán tối ưu

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Definition

Bài toán được gọi là

- không có nghiệm chấp nhận được (infeasible) nếu $\mathcal{X} = \emptyset$. Ngược lại nó được gọi là có nghiệm chấp nhận được (feasible).
- không bị chặn (unbounded) nếu nó có nghiệm chấp nhận được và ta luôn tìm được nghiệm chấp nhận được có giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn một giá trị hữu hạn cho trước bất kì.

$x \in \mathcal{X}$ được gọi là một nghiệm chấp nhận được (feasible solution).
$x^* \in \mathcal{X}$ được gọi là một nghiệm tối ưu (optimal solution) nếu

$$f(x^*) \le f(x), \ \forall x \in \mathcal{X}.$$

Bài toán tối ưu không ràng buộc (unconstrained)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Bài toán tối ưu tuyến tính (linear program)

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b. \end{aligned}$$

Bài toán tối ưu phi tuyến (nonlinear)

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, \ldots, k \\ & h_j(x) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, l. \end{aligned}$$

Bài toán tối ưu lồi (convex)

Dạng tổng quát:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \quad f(x)$$

với $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ lồi và $\mathcal{X}$ là một tập lồi.

Bài toán tối ưu lồi (convex)

Dạng tổng quát:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \quad f(x)$$

với $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ lồi và $\mathcal{X}$ là một tập lồi.

Dạng giới hạn bởi các đẳng thức và bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \ i = 1, 2, \ldots, k \\ & h_j(x) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, l \end{aligned}$$

trong đó f, g_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, là các hàm lồi và h_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, là các hàm affin.

Bài tập: Hãy chứng minh miền chấp nhận được của bài toán tối ưu hóa trên là một tập lồi.

Bài toán tối ưu nguyên (integer program)

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x_i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Cực trị địa phương và toàn cục

Cực trị địa phương và toàn cục

Xét bài toán tối ưu

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \dots, k \\ & h_j(x) = 0,\ j = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \tag{P}$$

với các hàm số $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Kí hiệu $\mathcal{X}(P)$ là tập nghiệm chấp nhận được của (P).

Definition

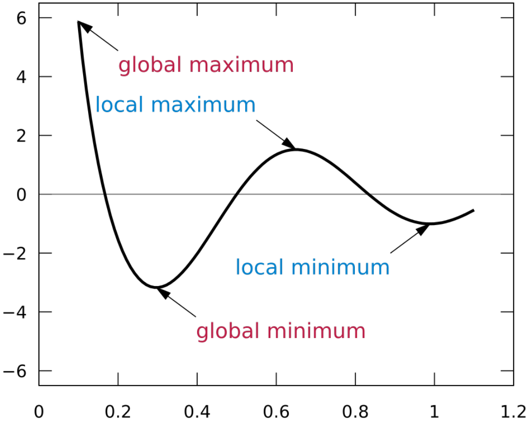
$\bar{x} \in \mathcal{X}(P)$ được gọi là là một cực tiểu địa phương của (P) nếu tồn tại $R > 0$ sao cho

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}(P), \|x - \bar{x}\|_2 \leq R.$$

$x^* \in \mathcal{X}(P)$ được gọi là là một cực tiểu toàn cục của (P) nếu

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}(P).$$

Cực trị địa phương và toàn cục



$x \in [0.1, 1]$

Cực trị của bài toán tối ưu lồi

Theorem

Cho một bài toán tối ưu lồi, nếu tồn tại cực tiểu địa phương thì nó cũng là cực tiểu toàn cục. Tập hợp của các cực tiểu (toàn cục) là một tập lồi.

Cực trị của bài toán tối ưu lồi

Theorem

Cho một bài toán tối ưu lồi, nếu tồn tại cực tiểu địa phương thì nó cũng là cực tiểu toàn cục. Tập hợp của các cực tiểu (toàn cục) là một tập lồi.

Chứng minh.

Cho $\bar{x}$ là một cực tiểu địa phương, ta có

$$\exists R > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X} \cap B(\bar{x}, R).$$

Cực trị của bài toán tối ưu lồi

Theorem

Cho một bài toán tối ưu lồi, nếu tồn tại cực tiểu địa phương thì nó cũng là cực tiểu toàn cục. Tập hợp của các cực tiểu (toàn cục) là một tập lồi.

Chứng minh.

Cho $\bar{x}$ là một cực tiểu địa phương, ta có

$$\exists R > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X} \cap B(\bar{x}, R).$$

Giả sử tồn tại $y \in \mathcal{X}$ sao cho $f(y) < f(\bar{x})$. Do tính lồi của $\mathcal{X}$ ta có

$$\lambda\bar{x} + (1-\lambda)y \in \mathcal{X},\ \forall\lambda \in [0, 1].$$

Do tính lồi của f ta có

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda)f(y) < f(\bar{x}),$$

Điều đó ngược với tính cực tiểu địa phương của $\bar{x}$ khi $\lambda \to 1$. $\square$

Các ví dụ

Các ví dụ ứng dụng

Bài tập về nhà: Hãy tìm các ví dụ ứng dụng thực tế của bài toán tối ưu.