

# Giới thiệu về tối ưu hóa

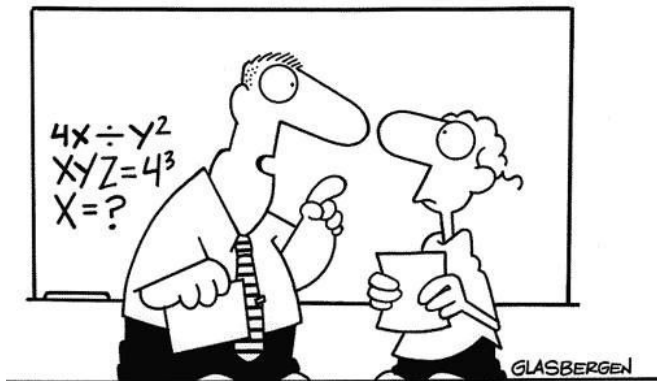
---

Hoàng Nam Dũng

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

# Toán học để làm gì?

Copyright 1997 Randy Glasbergen. [www.glasbergen.com](http://www.glasbergen.com)



**“Algebra class will be important to you later in life because there’s going to be a test six weeks from now.”**

Giải hệ phương trình<sup>1</sup>

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 2 \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ (x - 2) \log_3 x + y \log_3 y = x + 1 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Đề thi học sinh giỏi toán lớp 12 TPHCM năm 2016-2017

## Bill Gates nói về toán học

Thanh niên Mỹ phải coi khoa học và toán học là chìa khóa mở ra cơ hội. Nếu không, chúng ta sẽ không thể cạnh tranh trong nền kinh tế toàn cầu.

— Bill Gates, 2007

Rất nhiều nghề nghiệp trong tương lai sẽ đòi hỏi những kiến thức cơ bản về khoa học, kỹ năng toán học và kinh tế.

— Bill Gates, 2016

## Toán ứng dụng trong thực tế

Thường không ở dạng công thức, bài toán cho trước mà xuất phát từ những vấn đề trong thực tế

- ▶ Dự báo thời tiết
- ▶ Mô phỏng dòng chảy của dòng sông
- ▶ Thiết kế máy bay/ô tô tối ưu về khí động học
- ▶ Điều khiển các robot/ô tô tự hành
- ▶ Thiết kế hệ thống giao thông công cộng tối ưu
- ▶ Giải mã DNA
- ▶ Hạn chế tác hại của xạ trị
- ▶ Quản lý rủi ro và danh mục đầu tư
- ▶ ...

## Toán ứng dụng trong thực tế

Thường không ở dạng công thức, bài toán cho trước mà xuất phát từ những vấn đề trong thực tế

- ▶ Dự báo thời tiết
- ▶ Mô phỏng dòng chảy của dòng sông
- ▶ Thiết kế máy bay/ô tô tối ưu về khí động học
- ▶ Điều khiển các robot/ô tô tự hành
- ▶ Thiết kế hệ thống giao thông công cộng tối ưu
- ▶ Giải mã DNA
- ▶ Hạn chế tác hại của xạ trị
- ▶ Quản lý rủi ro và danh mục đầu tư
- ▶ ...

Và toán ứng dụng thường bắt đầu bằng mô hình hóa.

# Mô hình hóa

---

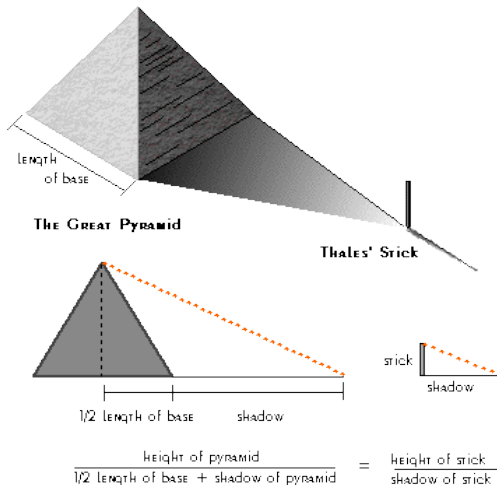
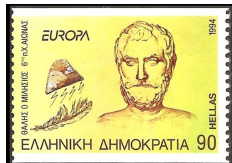
## Mô hình hóa toán học là gì?

Mô hình hóa là một quá trình sử dụng toán học để biểu diễn, phân tích, đưa ra dự đoán hoặc cung cấp cái nhìn sâu sắc về các hiện tượng trong thực tế.<sup>2</sup>

---

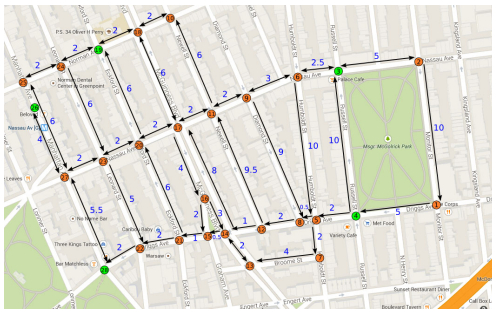
<sup>2</sup>SIAM: What is math modeling?

# Thales of Miletus (624 BC - 546 BC)





# Đường đi ngắn nhất



Đồ thị có hướng  $D$  gồm có

- ▶ Tập hợp  $V$  các đỉnh.
- ▶ Tập hợp các cạnh có hướng  $A$ , là tập chứa các cặp có thứ tự của các đỉnh thuộc  $V$ .
- ▶ Cạnh có trọng số không âm. Hàm trọng số  $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

# Dự báo thời tiết<sup>3</sup>



<sup>3</sup>[http://weather.ou.edu/~scavallo/classes/metr\\_5004/f2013/lectures/NWP\\_LecturesFall2013.pdf](http://weather.ou.edu/~scavallo/classes/metr_5004/f2013/lectures/NWP_LecturesFall2013.pdf)

# Dự báo thời tiết

Sử dụng các phương trình toán học để mô tả trạng thái vật lí của khí quyển và dự đoán về sự biến đổi của nó.

## Equations of motion (ECWMF model)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{a \cos^2 \theta} \left\{ U \frac{\partial U}{\partial \lambda} + v \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right\} + \eta \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

East-west wind

$$(-fv) + \frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + R_{dry} T_v \frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln p) \right\} = \underline{P_U + K_U}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a \cos^2 \theta} \left\{ U \frac{\partial V}{\partial \lambda} + V \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \sin \theta (U^2 + V^2) \right\} + \eta \frac{\partial V}{\partial \eta}$$

North-south wind

$$+ fU + \frac{\cos \theta}{a} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + R_{dry} T_v \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln p) \right\} = \underline{P_V + K_V}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a \cos^2 \theta} \left\{ U \frac{\partial T}{\partial \lambda} + V \cos \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right\} + \eta \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\kappa T_v \omega}{(1 + (\delta - 1)q)p} = \underline{P_T + K_T}$$

Temperature

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{a \cos^2 \theta} \left\{ U \frac{\partial q}{\partial \lambda} + V \cos \theta \frac{\partial q}{\partial \theta} \right\} = \eta \frac{\partial q}{\partial \eta} = \underline{P_q + K_q}$$

Humidity

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{v}_H \frac{\partial p}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = 0$$

Continuity of mass

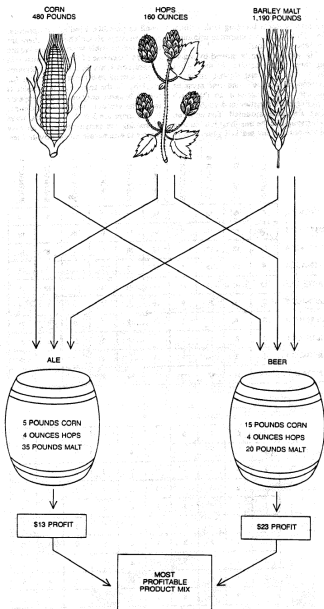
$$\frac{\partial p_{surf}}{\partial t} = - \int_0^1 \nabla \cdot (\mathbf{v}_H \frac{\partial p}{\partial \eta}) d\eta$$

Surface pressure

Siêu máy tính sẽ được sử dụng để giải hệ phương trình này.

# Lên kế hoạch sản xuất

- ▶ Một xưởng làm bia sản xuất ra 2 loại sản phẩm "ale" và bia.
- ▶ Để tạo ra chúng cần có 3 loại nguyên liệu ngô, hoa bia và mạch nha.
- ▶ Tuy nhiên nguồn cung của các nguyên liệu này có hạn.
- ▶ Xưởng muốn lên kế hoạch sản xuất sao cho lợi nhuận cao nhất.



## Lên kế hoạch sản xuất

	ngô (lbs)	hoa bia (oz)	mạch nha (lbs)	lợi nhuận (\$)
có sẵn	480	160	1190	
ale (thùng)	5	4	35	13
bia (thùng)	15	4	20	23

## Lên kế hoạch sản xuất

	ngô (lbs)	hoa bia (oz)	mạch nha (lbs)	lợi nhuận (\$)
có sẵn	480	160	1190	
ale (thùng)	5	4	35	13
bia (thùng)	15	4	20	23

*ale*      *bia*

$$5A + 15B \leq 480 \quad \text{ngô}$$

## Lên kế hoạch sản xuất

	ngô (lbs)	hoa bia (oz)	mạch nha (lbs)	lợi nhuận (\$)
có sẵn	480	160	1190	
ale (thùng)	5	4	35	13
bia (thùng)	15	4	20	23

*ale*

*bia*

$$5A + 15B \leq 480 \quad \text{ngô}$$

$$4A + 4B \leq 160 \quad \text{hoa bia}$$

## Lên kế hoạch sản xuất

	ngô (lbs)	hoa bia (oz)	mạch nha (lbs)	lợi nhuận (\$)
có sẵn	480	160	1190	
ale (thùng)	5	4	35	13
bia (thùng)	15	4	20	23

*ale*

*bia*

$$5A + 15B \leq 480$$

ngô

$$4A + 4B \leq 160$$

hoa bia

$$35A + 20B \leq 1190$$

mạch nha

## Lên kế hoạch sản xuất

	ngô (lbs)	hoa bia (oz)	mạch nha (lbs)	lợi nhuận (\$)
có sẵn	480	160	1190	
ale (thùng)	5	4	35	13
bia (thùng)	15	4	20	23

*ale*

*bia*

$$5A + 15B \leq 480$$

ngô

$$4A + 4B \leq 160$$

hoa bia

$$35A + 20B \leq 1190$$

mạch nha

$$A \geq 0$$

$$B \geq 0$$

## Lên kế hoạch sản xuất

	ngô (lbs)	hoa bia (oz)	mạch nha (lbs)	lợi nhuận (\$)
có sẵn	480	160	1190	
ale (thùng)	5	4	35	13
bia (thùng)	15	4	20	23

$$\begin{array}{llllll} & & \textit{ale} & & \textit{bia} & & \\ \text{maximize} & 13A & + & 23B & & & \text{lợi nhuận} \\ & \textit{A,B} & & & & & \\ \text{s.t.} & 5A & + & 15B & \leq & 480 & \text{ngô} \\ & 4A & + & 4B & \leq & 160 & \text{hoa bia} \\ & 35A & + & 20B & \leq & 1190 & \text{mạch nha} \\ & & & A & \geq & 0 & \\ & & & B & \geq & 0 & \end{array}$$

Toán nói chung và toán ứng dụng nói riêng rất rộng. Trong bài nói chuyện này chúng ta chỉ đề cập đến lĩnh vực tối ưu hóa.

Toán nói chung và toán ứng dụng nói riêng rất rộng. Trong bài nói chuyện này chúng ta chỉ đề cập đến lĩnh vực **tối ưu hóa**.

**Vậy tối ưu hóa là gì?**

# Tối ưu hóa trong tự nhiên

---

## Tự nhiên "luôn" tối ưu

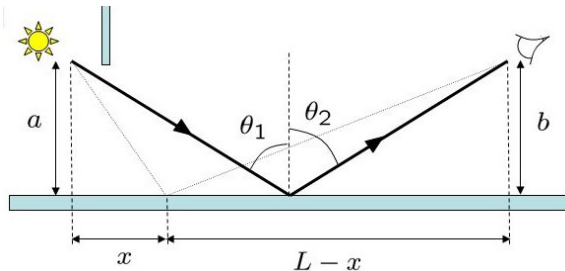
Dù hữu ý hay vô tình, thiên nhiên tối ưu hóa. Chuyển động của các ngôi sao, hành tinh và các tia sáng trong vũ trụ được chi phối bởi một nguyên tắc tối ưu hóa: nguyên lý tác dụng tối thiểu. Hình dạng và chức năng của protein được xác định bởi cấu hình năng lượng tối thiểu của phân tử. Các quả bóng dừng trong thung lũng chứ không phải trên sườn đồi bởi vì chúng hướng đến trạng thái có thể năng tối ưu.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>[wid.wisc.edu/the-natural-order-and-divine-law-of-optimization/](http://wid.wisc.edu/the-natural-order-and-divine-law-of-optimization/)

— M. Ferris and S. Wright, 2015

## Ánh sáng - kể tiết kiệm thời gian



Hiện tượng phản xạ: Theo nguyên lý thời gian tối thiểu của Fermat ta có

$$\theta_1 = \theta_2.$$

## Ong - kiến trúc sư đại tài



---

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Honeycomb\\_structure](https://en.wikipedia.org/wiki/Honeycomb_structure)

## Ong - kiến trúc sư đại tài



Cấu trúc tổ ong cho phép sử dụng ít nguyên liệu nhất, nhẹ nhất, đồng thời có tỉ lệ *sức bền vật liệu/trọng lượng* cao.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Honeycomb\\_structure](https://en.wikipedia.org/wiki/Honeycomb_structure)

## Tại sao bong bóng xà phòng có hình cầu?



## Tại sao bong bóng xà phòng có hình cầu?



Lực căng sẽ khiến bong bóng chuyển dần sang hình dạng có chu vi nhỏ nhất (để cùng chứa một lượng không khí bị giữ bên trong) và đó chính là hình cầu.

# Bài toán tối ưu

---

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{maximize}} && f(x) \\ & \text{subject to} && x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{maximize}} && f(x) \\ & \text{subject to} && x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

- ▶ *Biến  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$*
- ▶ *Hàm mục tiêu  $f$*
- ▶ *Điều kiện  $x \in \mathcal{X}$  (tập hợp nghiệm chấp nhận được  $\mathcal{X}$ ).*

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{maximize}} && f(x) \\ & \text{subject to} && x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

- ▶ *Biến  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$*
- ▶ *Hàm mục tiêu  $f$*
- ▶ *Điều kiện  $x \in \mathcal{X}$  (tập hợp nghiệm chấp nhận được  $\mathcal{X}$ ).*

$x$ ,  $f$ ,  $\mathcal{X}$  của các bài toán thực tế đến từ quá trình mô hình hóa.

## Bài toán tối ưu tuyến tính

$$\max_x \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

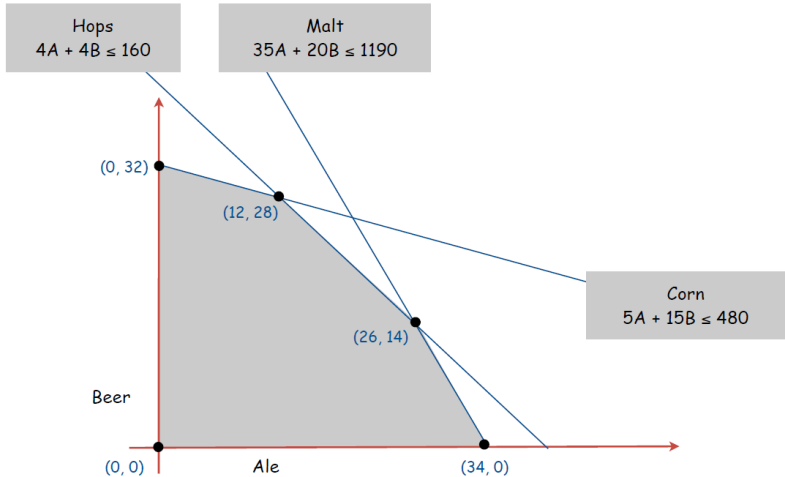
...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

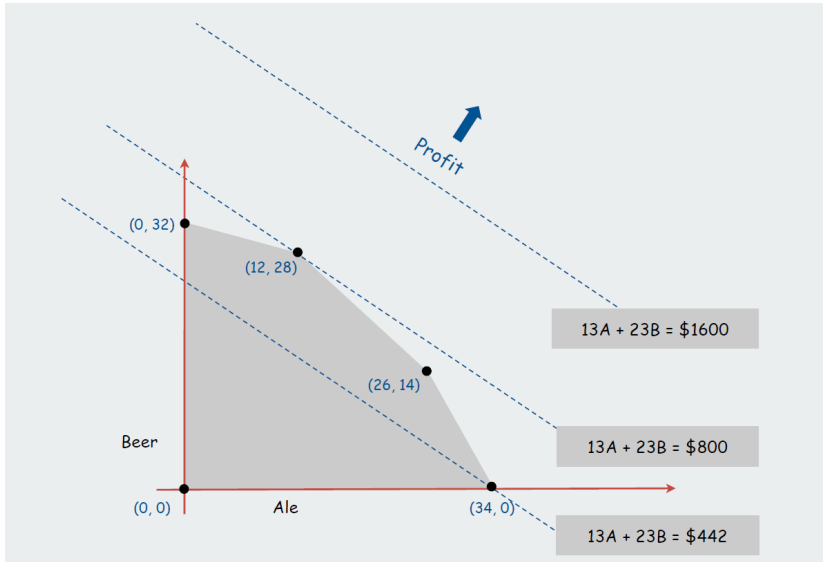
## Lên kế hoạch sản xuất cho nhà máy bia

$$\begin{array}{llllll} \max_{A,B} & 13A & + & 23B & & \text{lợi nhuận} \\ \text{s.t.} & 5A & + & 15B & \leq & 480 & \text{ngô} \\ & 4A & + & 4B & \leq & 160 & \text{hoa bia} \\ & 35A & + & 20B & \leq & 1190 & \text{mạch nha} \\ & & & A & \geq & 0 & \\ & & & B & \geq & 0 & \end{array}$$

# Lên kế hoạch sản xuất cho nhà máy bia



# Lên kế hoạch sản xuất cho nhà máy bia



# Tối ưu hóa trong thực tế

Trong thực tế bài toán tối ưu của chúng ta có thể có đến hàng (chục/trăm) triệu biến và điều kiện.

---

<sup>5</sup>1 trong 10 thuật toán quan trọng nhất của thế kỷ 20

## Tối ưu hóa trong thực tế

Trong thực tế bài toán tối ưu của chúng ta có thể có đến hàng (chục/trăm) triệu biến và điều kiện.

Vì vậy sẽ cần phải có những thuật toán hữu hiệu.

Với bài toán tối ưu tuyến tính đó là thuật toán đơn hình<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>1 trong 10 thuật toán quan trọng nhất của thế kỷ 20

## Sự cải tiến của thuật toán đơn hình

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- ▶ CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- ▶ CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày
- ▶ CPLEX 5.0 (1997) 1.5 giờ

## Sự cải tiến của thuật toán đơn hình

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- ▶ CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày
- ▶ CPLEX 5.0 (1997) 1.5 giờ
- ▶ CPLEX 8.0 (2002) 86.7 giây

## Sự cải tiến của thuật toán đơn hình

Năm 2003, GS. Bob Bixby so sánh tốc độ tính toán của các phiên bản phần mềm CPLEX giải một bài toán có 1,584,000 biến và 401,640 điều kiện trên máy tính P4 2.0GHz

- ▶ CPLEX 1.0 (1988) 29.8 ngày
- ▶ CPLEX 5.0 (1997) 1.5 giờ
- ▶ CPLEX 8.0 (2002) 86.7 giây
- ▶ CPLEX 2003 59.1 giây

Tăng tốc **43500x**

## Sự cải tiến của thuật toán đơn hình: 1988-2002

- ▶ Tăng tốc của thuật toán (trung bình) **3300x**

## Sự cải tiến của thuật toán đơn hình: 1988-2002

- ▶ Tăng tốc của thuật toán (trung bình) **3300x**
- ▶ Tăng tốc của máy tính **1600x**

## Sự cải tiến của thuật toán đơn hình: 1988-2002

- ▶ Tăng tốc của thuật toán (trung bình) **3300x**
- ▶ Tăng tốc của máy tính **1600x**
- ▶ Kết hợp **5,280,000x**

## Sự cải tiến của thuật toán đơn hình: 1988-2002

- ▶ Tăng tốc của thuật toán (trung bình) **3300x**
- ▶ Tăng tốc của máy tính **1600x**
- ▶ Kết hợp **5,280,000x**

Điều đó có nghĩa là vào năm 1988 (sử dụng phần mềm và máy tính năm 1988) cần **2 tháng** để giải thì đến năm 2002 chỉ cần **1 giây**.

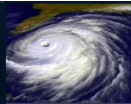
## Một vài ứng dụng của toán học

---

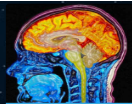
# Ứng dụng của toán học<sup>6</sup>



Maps of the Earth



Predicting the Weather



MRI and Tomography



Supply Chains



Finance and Banking



Internet and Phones



Cosmology



Computers



Construction



Reading CDs and DVDs



Glacier Melting



Public Key Cryptography



Satellite Navigation



Automotive Design



Codes and Communication



Building Bridges



Digital Music



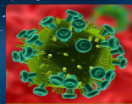
Neurology



Gambling and Betting



Search Engines



Epidemics Analysis



Navigation



Speech Recognition



Robotics



Football Scoring



Volcano Monitoring



Lottery



Roller Coaster Design

<sup>6</sup><https://mathigon.org/applications>

# Ứng dụng của toán học<sup>6</sup>



Breaking the Enigma



Public Transportation



Crowd Control



Insurance



Space Observations



Computer Games



Carbon Dating



Computer Circuits



Making Music



Movie Graphics



Defence and Military



Traffic Optimisation



Rockets and Satellites



Problem Solving



Crime Prediction



Loans, Interest, Mortgages



Skate Park Design



Search for Alien Life



Fraud Detection



Big Data



Microwaves



Image Compression



Pharmacy and Medicine



Swimsuit Design



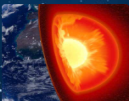
Pricing Strategies



Polling and Voting



Music Shuffling



Tectonic Plate Motion

<sup>6</sup><https://mathigon.org/applications>

# Automatic guided vehicle (AGV)<sup>7</sup>



<sup>7</sup>[https://www.youtube.com/watch?v=zm\\_rlLye1Qo](https://www.youtube.com/watch?v=zm_rlLye1Qo)

# Amazon robot<sup>8</sup>



<sup>8</sup><https://www.youtube.com/watch?v=3eQAFVetNGI>

# Môn học tối ưu hóa

---

Trang chủ: <http://seminar.optima.vn/opt>

- ▶ Thông tin môn học
- ▶ Slides bài giảng
- ▶ Bài tập

Các đầu điểm: Bài tập (BT), thi giữa kì (GK), thuyết trình (TT), thi cuối kì (HK)

Điểm thành phần

- ▶ Thường xuyên (20%) =  $0.9 \times \text{điểm BT} + 0.3 \times \text{điểm TT}$
- ▶ Giữa kì (20%) =  $0.9 \times \text{điểm GK} + 0.3 \times \text{điểm TT}$
- ▶ Cuối kì (60%) = điểm HK

Nói không với chép bài. **Không trung thực sẽ bị phạt nặng!**

Chỉ cần 1 lần vi phạm sẽ bị 0 điểm thành phần tương ứng, bất kể người chép hay cho chép.

2 nhóm giống nhau (đủ nhiều) dù không trao đổi nhưng cùng chép từ 1 nguồn cũng bị coi là vi phạm.

Download sách: <http://libgen.is/>

### Tài liệu tham khảo

- ▶ D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, and J. Tsitsiklis (1997), Introduction to Linear Optimization, Athena Scientific.
- ▶ J. Nocedal and S. J. Wright (1999), Numerical Optimization, Springer-Verlag.
- ▶ S. Boyd and L. Vandenberghe (2004), Convex Optimization, Cambridge University Press, (link download <https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/>)

### Tài liệu tham khảo thêm

- ▶ Nguyễn Ngọc Thắng, Nguyễn Đình Hóa (2005), Quy hoạch tuyến tính, NXB ĐHQGHN.
- ▶ Nguyễn Thị Bạch Kim (2008), Giáo trình các phương pháp tối ưu: lý thuyết và thuật toán, NXB ĐHBKHN.