

Bài 1 (1.5 điểm). Công ty Hòa Phát muốn cắt các thanh thép dài 6m thành các đoạn thành phẩm dài lần lượt 1m, 2m và 3m để cung cấp cho khách hàng. Có 7 cách cắt với số lượng thành phẩm từng loại thể hiện trong bảng sau

	Cách 1	Cách 2	Cách 3	Cách 4	Cách 5	Cách 6	Cách 7
1m	6	4	3	2	1	0	0
2m	0	1	0	2	1	3	0
3m	0	0	1	0	1	0	2

Có 3 khách hàng A, B và C với nhu cầu từng loại như sau

	A	B	C
1m	50	20	60
2m	100	150	900
3m	200	250	100

Hãy xây dựng mô hình tối ưu nguyên để giúp công ty Hòa Phát xác định phương án cắt vật liệu đáp ứng đủ nhu cầu của khách hàng sao cho số thanh thép 6m phải sử dụng để cắt là ít nhất.

Bài 2 (4.5 điểm). Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 2 \\ & -2x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- a) (1đ). Hãy viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên.
- b) (2.5đ). Hãy giải bài toán sử dụng thuật toán đơn hình 2 pha.
- c) (1đ). Biết rằng $(2, 2)^T$ là một nghiệm tối ưu của bài toán trên. Hãy tìm ra một nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài 3 (4 điểm). Cho hàm số $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 - \alpha \|x\|_2^2,$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) (1đ). Với A là ma trận đơn vị cấp n , hãy tìm tất cả các giá trị của α để f là một hàm lồi.

b) (1đ). Hãy tìm các cực trị địa phương của f với A là ma trận vuông cấp n bất kì và $\alpha > 0$. Các cực trị địa phương tìm được có phải là cực tiểu hay cực đại toàn cục không? Nêu rõ lý do.

c) (1đ). Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \alpha = 1,$$

hãy tìm nghiệm cực tiểu toàn cục của hàm f .

d) (1đ). Hãy viết công thức của thuật toán giảm gradient và thực hiện 2 bước (iterations) của thuật toán với độ dài bước $\lambda = 0.5$ cho hàm f với các tham số như trong câu c và điểm xuất phát $x_0 = (0, 0)^T$.

Bài 4 (1 điểm). Hãy nêu ưu và nhược điểm của thuật toán Newton so với thuật toán giảm gradient.