

LƯU Ý: Đề thi gồm có 2 trang.

Bài 1 (4 điểm).

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & -x_1 & & & & & \leq & -1 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

- a) (1.5đ). Hãy sử dụng định lý về độ lệch bù kiểm tra xem $(2, 0, 1)^T$ có là nghiệm tối ưu của bài toán trên không.
- b) (2.5đ). Hãy giải bài toán sử dụng thuật toán đơn hình phù hợp.

Bài 2 (3.5 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$f(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 7x_2 + 1,$$

- a) (0.5 điểm) f có là hàm lồi hay không? Hãy giải thích rõ lý do.
- b) (1 điểm) Hãy tìm tất cả các điểm dừng của f .
- c) (1 điểm) Trong số các điểm dừng tìm được từ câu b, hãy giải thích cụ thể điểm nào là cực tiểu/cực đại địa phương, điểm nào không phải là cực trị địa phương.
- d) (1 điểm) Hãy viết công thức của thuật toán Newton và thực 1 bước của thuật toán cho hàm f với độ dài bước $\lambda = 1$ và điểm xuất phát $x^0 = (0, 0)$.

Bài 3 (1.5 điểm). Một nhà đầu tư cá nhân có tổng số vốn là 2 tỷ VNĐ. Anh ta đang xem xét 5 cơ hội đầu tư tiềm năng trong năm 2026 với các thông số dự báo như sau:

STT	Các khoản đầu tư	Vốn yêu cầu (triệu VNĐ)	Lợi nhuận dự kiến (triệu VNĐ/năm)
1	Cổ phiếu HPG (A)	600	120
2	Cổ phiếu TCB (B)	500	90
3	Bất động sản tại Long An (C)	1200	250
4	Chứng chỉ quỹ VESAF (D)	400	70
5	Vàng (E)	300	30

- a) (1đ) Hãy lập mô hình quy hoạch nguyên với các biến nhị phân quyết định lựa chọn những khoản đầu tư nào để có danh mục tối ưu dựa trên các mục tiêu và điều kiện sau:

————— Lưu ý: xem tiếp trang sau —————

1. **Mục tiêu:** Tối đa hóa tổng lợi nhuận kỳ vọng từ danh mục đầu tư.
2. **Giới hạn ngân sách:** Tổng vốn đầu tư không được vượt quá ngân sách của nhà đầu tư.
3. **Ràng buộc loại trừ:** Để phân bổ rủi ro, nhà đầu tư chỉ được chọn tối đa 2 trong số 3 tài sản tài chính cổ phiếu HPG (A), cổ phiếu TCB (B) và chứng chỉ quỹ VESAF (D).

b) (0.5d) Hãy bổ sung thêm ràng buộc sau vào mô hình

4. **Ràng buộc phụ thuộc:** Nếu nhà đầu tư quyết định mua bất động sản tại Long An (C) thì bắt buộc phải đầu tư vào vàng (E) để đảm bảo tính thanh khoản và phòng thủ.

Bài 4 (1 điểm). Xét bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chuẩn tắc có nghiệm tối ưu. Có bao giờ tập nghiệm tối ưu của bài toán gồm đúng 2 nghiệm khác nhau hay không? Nếu câu trả lời là có hãy đưa ra ví dụ. Nếu câu trả lời là không hãy chứng minh điều đó không thể xảy ra.