

**Bài 1** (2 điểm). Bill có một trang trại tại bang Kansas rộng 100 hecta. Cho vụ mùa trồng trọt tới anh ta định trồng lúa mì, ngô, yến mạch và đậu nành. Bảng dưới đây cung cấp thông tin về sản lượng thu hoạch dự tính, chi phí (phải trả trước khi thu hoạch), lượng nước tưới (bổ sung thêm cho lượng nước mưa dự báo) và giá bán

Nông phẩm	Sản lượng (tấn/hecta)	Chi phí (\$/hecta)	Nước tưới ( $m^3$ /hecta)	Giá bán (\$/tấn)
Lúa mì	13	1235	6167	342
Ngô	19	1900	18500	166
Yến mạch	11	770	3084	155
Đậu nành	15	1500	12335	332

Bill muốn thu hoạch ít nhất 600 tấn lúa mì và 600 tấn ngô nhưng không quá 500 tấn yến mạch. Anh ta có \$125000 để đầu tư vào vụ mùa. Đồng thời Bill mong muốn chỉ sử dụng tối đa 1.4 triệu  $m^3$  nước mà bộ phận phụ trách nông nghiệp của ban đã phân bổ cho trang trại.

- a) (1.5đ). Bạn hãy đưa ra mô hình tối ưu tuyến tính để giúp Bill lên kế hoạch trồng trọt đáp ứng đầy đủ các ràng buộc và có được lợi nhuận cao nhất.
- b) (0.5đ). Ngoài số tiền tự có, Bill có thể vay tiền ngân hàng với lãi suất 5%/năm. Khi đó mô hình bài toán sẽ thay đổi như thế nào?

**Lưu ý:** Mục tiêu là lợi nhuận cao nhất chứ không phải doanh thu cao nhất.

**Bài 2** (4 điểm). Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 - x_2 \leq -1 \\ & \quad \quad \quad x_2 \leq 2 \\ & \quad \quad \quad x_1 - x_2 \leq 1 \\ & \quad \quad \quad x_1 + x_2 \leq 3 \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- a) (1đ). Hãy viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên.
- b) (3đ). Hãy giải bài toán sử dụng thuật toán đơn hình 2 pha.

**Bài 3** (4 điểm). Cho hàm số  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  được định nghĩa bởi

$$f(x) = x^T(A - \alpha I)x + b^T x,$$

trong đó  $I$  là ma trận đơn vị,  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  và

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) (1đ). Hãy tìm tất cả các giá trị của  $\alpha$  để  $f$  là một hàm lồi.

b) (2đ). Cho

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \alpha = 0.$$

Hãy tìm các cực trị địa phương của  $f$ . Các cực trị địa phương tìm được có phải là cực tiểu hay cực đại toàn cục không? Nêu rõ lý do.

c) (1đ). Hãy viết công thức của thuật toán giảm gradient và thực hiện 2 bước (iterations) của thuật toán với độ dài bước  $\lambda = 0.5$  cho hàm  $f$  với các tham số như trong câu c và điểm xuất phát  $x_0 = (0, 0)^T$ .